

DELHI
UNIVERSITY
LIBRARY.

u
Class No 51-

Book No 1745

DELHI UNIVERSITY LIBRARY

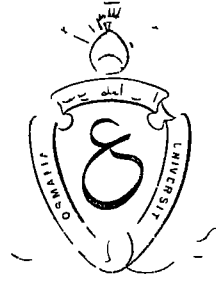
Cl. No. []

Date of release for loan

Ac. No.

This book should be returned on or before the date last stamped below.

An overdue charge of one anna will be charged for each day the book is kept overtime.



بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ہندسہ محکمات

انٹرمیڈیٹ کی جماعتوں کے لئے برائے اسکول جو تیری ہال اینڈ سٹوڈنٹس حصہ ششم

ترجمہ

قاضی محمد حسین صاحب ایم اے

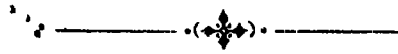
پروفیسر ریاضیات عثمانیہ کالج حیدرآباد دکن

۳۳۹ھ ۳۳۰ھ ۱۹۲۰ء

عطاء الرحمن صاحب کالج حیدرآباد دکن

یہ کتاب میکسن کمپنی کی اجازت سے
جن کو حقوق کا پی رائٹ حاصل ہیں
طبع کی گئی ہے۔

مُقَدِّمہ



دنیا میں ہر قوم کی زندگی میں ایک ایسا زمانہ آتا ہے جب کہ اُس کے قوائے ذہنی میں انحطاط کے آثار نمودار ہونے لگتے ہیں، ایجاد و اختراع اور غور و فکر کا مادہ تقریباً مفقود ہو جاتا ہے، تخیل کی پرواز اور نظر کی جولانی تنگ اور محدود ہو جاتی ہے، علم کا دار و مدار چند رسمی باتوں اور تقلید پر رہ جاتا ہے۔ اُس وقت قوم یا تو بیکار اور مردہ ہو جاتی ہے یا سنبھلنے کے لئے یہ لازم ہوتا ہے کہ وہ دوسری ترقی یافتہ اقوام کا اثر قبول کرے۔ تاریخ عالم کے ہر دور میں اس کی شہادتیں موجود ہیں۔ خود ہمارے دیکھتے دیکھتے جاپان پر یہی گزری اور یہی حالت اب ہندوستان کی ہے۔ جس طرح کوئی شخص دوسرے بنی نوع انسان سے قطع تعلق کر کے تنہا اور الگ تھلک نہیں رہ سکتا اور اگر رہے تو پنپ

نہیں سکتا اسی طرح یہ بھی ممکن نہیں کہ کوئی قوم دیگر اقوام عالم سے بے نیاز ہو کر پھولے پھلے اور ترقی پائے۔ جس طرح ہوا کے جھونکے اور ادنیٰ پرندوں اور کیڑے مکوڑوں کے اثر سے وہ مقامات تک ہرے بھرے رہتے ہیں جہاں انسان کی دسترس نہیں اسی طرح انسانوں اور قوموں کے اثر بھی ایک دوسرے تک اڑ کر پہنچتے ہیں۔ جس طرح یونان کا اثر روم اور دیگر اقوام یورپ پر پڑا جس طرح عرب نے عجم کو اور عجم نے عرب کو اپنا فیض پہنچایا، جس طرح اسلام نے یورپ میں تاریکی اور جہالت کو مٹا کر علم کی روشنی پہنچائی اسی طرح آج ہم بھی بہت سی باتوں میں مغرب کے محتاج ہیں۔ یہ قانون عالم ہے جو یوں ہی جاری رہا اور جاری رہیگا۔

”دنئے سے دیا یوں ہی جلتا رہا ہے“

جب کسی قوم کی نوبت یہاں تک پہنچ جاتی ہے اور وہ آگے قدم بڑھانے کی سعی کرتی ہے تو ادبیات کے میدان میں پہلی منزل ترجمہ ہوتی ہے۔ اس لئے کہ جب قوم میں جدت اور ایج نہیں رہی تو ظاہر ہے کہ اس کی تصانیف معمولی ادھوری، کم مایہ اور ادنیٰ ہونگی۔ اُس وقت قوم کی بڑی خدمت یہی ہے کہ ترجمہ کے ذریعہ سے دنیا کی اعلیٰ درجہ کی تصانیف اپنی زبان میں لائی جائیں۔ یہی ترجمے خیالات میں تنویر اور معلومات میں اضافہ کریں گے، جمود کو توڑیں گے اور قوم میں ایک نئی حرکت پیدا کریں گے اور پھر آخر یہی ترجمے تصنیف و تالیف

کے جدید اسلوب اور ڈسٹنگ سبجائیں گے۔ ایسے وقت میں ترجمہ تصنیف سے زیادہ قابل قدر، زیادہ مفید اور زیادہ فیض رساں ہوتا ہے۔

اسی اصول کی بنا پر جب عثمانیہ یونیورسٹی کی تجویز پیش ہوئی تو ہنر اکراٹھ ہائینس رستم دوراں ارسطوئے زماں سہ سالار آصف جاہ مظفر الممالک نظام الملک نظام الدولہ نواب میر عثمان علیخان بہادر فتح جنگ جی۔ سی۔ اس۔ آئی۔ جی۔ سی۔ بی۔ ای۔ والی حیدرآباد وکن خلد اللہ ملکہ و سلطنت نے جن کی علمی قدردانی اور علمی سرپرستی اس زمانہ میں اچانے علوم کے حق میں آب حیات کا کام کر رہی ہے، یہ تقاضائے مصلحت و دور بینی سب سے اول سرشتہ تالیف و ترجمہ کے قیام کی منظوری عطا فرمائی جو نہ صرف یونیورسٹی کے لئے نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کریگا بلکہ ملک میں نشہ و اشاعت علوم و فنون کا کام بھی انجام دیگا۔ اگرچہ اس سے قبل بھی یہ کام ہندوستان کے مختلف مقامات میں تھوڑا تھوڑا انجام پایا مثلاً فورٹ ولیم کالج کلکتہ میں زیر نگرانی ڈاکٹر بگلرست، دہلی سوسائٹی میں انجمن پنجاب میں زیر نگرانی ڈاکٹر لائٹنر و کرنل ہارلاند، علی گڑھ سائنٹفک انسٹیٹیوٹ میں جس کی بنا سر سید احمد خاں مرحوم نے ڈالی۔ مگر یہ کوششیں سب وقتی اور عارضی تھیں۔ نہ انکے پاس کافی سرمایہ اور سامان تھا نہ انہیں یہ موقع حاصل تھا

اور نہ انہیں **اَعْلٰی حَضْرَت وَاَقْلَس** جیسے علم پرور
 فرانزوا کی سرپرستی کا شرف حاصل تھا۔ یہ پہلا وقت ہے کہ
 اردو زبان کو علوم و فنون سے مالا مال کرنے کے لئے باقاعدہ
 اور مستقل کوشش کی گئی ہے۔ اور یہ پہلا وقت ہے کہ
 اردو زبان کو یہ رتبہ ملا ہے کہ وہ اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار
 پائی ہے۔ احیائے علوم کے لئے جو کام آگسٹس نے روم میں
 خلافت عباسیہ میں ہارون الرشید و مامون الرشید نے ہسپانیہ میں
 عبدالرحمن ثالث نے، بکراجیت و اکبر نے ہندوستان میں
 الفرڈ نے انگلستان میں، پیٹر اعظم و کیتھرائٹ نے روس میں
 اور منت شی ہٹو نے جاپان میں کیا وہی فرانزوائے دولت
اَصْفِیَہ نے اس ملک کے لئے کیا۔ **اَعْلٰی حَضْرَت وَاَقْلَس**
 کا یہ کارنامہ ہندوستان کی علمی تاریخ میں ہمیشہ فخر و مباہات
 کے ساتھ ذکر کیا جائیگا۔

منجملہ اُن اسباب کے جو قومی ترقی کا موجب ہوتے ہیں ایک
 بڑا سبب زبان کی تکمیل ہے۔ جس قدر جو قوم زیادہ ترقی یافتہ
 ہے اُسی قدر اُس کی زبان وسیع اور اس میں نازک خیالات
 اور علمی مطالب کے ادا کرنے کی زیادہ صلاحیت ہوتی ہے،
 اور جس قدر جس قوم کی زبان محدود ہوتی ہے اُسی قدر تہذیب
 و شایستگی بلکہ انسانیت میں اس کا درجہ کم ہوتا ہے۔ چنانچہ
 وحشی اقوام میں الفاظ کا ذخیرہ بہت ہی کم پایا گیا ہے۔ علمائے
 فلسفہ و علم اللسان نے یہ ثابت کیا ہے کہ زبان، خیال اور

خیال، زبان ہے اور ایک مدت کے بعد اس نتیجے پر پہنچے ہیں کہ انسانی دماغ کے صحیح تاریخی ارتقا کا علم زبان کی تاریخ کے مطالعہ سے حاصل ہو سکتا ہے۔ الفاظ ہمیں سوچنے میں ویسی ہی مدد دیتے ہیں جیسی آنکھیں دیکھنے میں۔ اس لئے زبان کی ترقی درحقیقت عقل کی ترقی ہے۔

علم ادب اسی قدر وسیع ہے جس قدر حیات انسانی۔ اور اس کا اثر زندگی کے ہر شعبہ پر پڑتا ہے۔ وہ نہ صرف انسان کی ذہنی، معاشرتی، سیاسی ترقی میں مدد دیتا، اور نظر میں سوت دماغ میں روشنی، دلوں میں حرکت اور خیالات میں تغیر پیدا کرتا ہے بلکہ قوموں کے بنانے میں ایک قوی آلہ ہے۔ قومیت کے لئے ہم خیالی شرط ہے اور ہم خیالی کے لئے ہم زبانی لازم گویا ایک زبانی قومیت کا شیرازہ ہے جو اسے منتشر ہونے سے بچائے رکھتا ہے۔ ایک زمانہ تھا جب کہ مسلمان اقطاع عالم میں پھیلے ہوئے تھے لیکن اُن کے علم ادب اور زبان نے انہیں ہر جگہ ایک کر رکھا تھا۔ اس زمانے میں انگریز ایک دنیا پر چھائے ہوئے ہیں لیکن باوجود بُعد مسافت و اختلافِ مالا ایک زبانی کی بدولت قومیت کے ایک سلسلے میں منسلک ہیں، زبان میں جادو کا سا اثر ہے اور صرف افراد ہی پر نہیں بلکہ اقوام پر بھی اُس کا وہی تسلط ہے۔

یہی وجہ ہے کہ تعلیم کا صحیح اور فطرتی ذریعہ اپنی ہی زبان ہو سکتی ہے۔ اس امر کو اَعْلٰی حَضْرَتِ اَوَّلَس نے

پچانا اور جامعہ عثمانیہ کی بنیاد ڈالی۔ جامعہ عثمانیہ ہندوستان میں پہلی یونیورسٹی ہے جس میں ابتدائے انتہا تک ذریعہ تعلیم ایک دیسی زبان ہوگا۔ اور یہ زبان اردو ہوگی۔ ایک ایسے ملک میں جہاں ”ہسنت بہانت کی بولیاں“ بولی جاتی ہیں، جہاں ہر صوبہ ایک نیا عالم ہے، صرف اردو ہی ایک عام اور مشترک زبان ہو سکتی ہے۔ یہ اہل ہند کے میل جول سے پیدا ہوئی اور اب بھی یہی اس فرض کو انجام دیگی۔ یہ اس کے خمیر اور وضع و ترکیب میں ہے۔ اس لئے یہی تعلیم اور تبادلوں خیالات کا واسطہ بن سکتی اور قومی زبان کا دعویٰ کر سکتی ہے۔

’جب تعلیم کا ذریعہ اردو قرار دیا گیا تو یہ کھلا اعتراض تھا کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کتابوں کا ذخیرہ کہاں ہے اور ساتھ ہی یہ بھی کہا جاتا تھا کہ اردو میں یہ صلاحیت ہی نہیں کہ اس میں علوم و فنون کی اعلیٰ تعلیم ہو سکے۔ یہ صمیم ہے کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کافی ذخیرہ نہیں۔ اور اردو ہی پر کیا منحصر ہے، ہندوستان کی کسی زبان میں بھی نہیں۔ یہ طلب و رسد کا عام مسئلہ ہے۔ جب مانگ ہی نہ تھی تو رسد کہاں سے آتی۔ جب ضرورت ہی نہ تھی تو کتابیں کیونکر مینا ہوتیں۔ ہماری اعلیٰ تعلیم غیر زبان میں ہوتی تھی، تو علوم و فنون کا ذخیرہ ہماری زبان میں کہاں سے آتا۔ ضرورت ایجاد کی مان ہے۔ اب ضرورت محسوس ہوئی ہے تو کتابیں بھی

میتا ہو جائیں گی۔ اسی کمی کو پورا کرنے اور اسی ضرورت کو رفع کرنے کے لئے سررشتہ تالیف و ترجمہ قائم کیا گیا۔ یہ صحیح نہیں ہے کہ اردو زبان میں اس کی صلاحیت نہیں۔ اس کے لئے کسی دلیل و برہان کی ضرورت نہیں۔ سررشتہ تالیف و ترجمہ کا وجود اس کا شافی جواب ہے۔ یہ سررشتہ یہی کام کر رہا ہے۔ کتابیں تالیف و ترجمہ ہو رہی ہیں اور چند روز میں عثمانیہ یونیورسٹی کالج کے طالب علموں کے ہاتھوں میں ہونگی اور رفتہ رفتہ عام شائقین علم تک پہنچ جائیں گی۔

لیکن اس میں سب سے کٹھن اور سنگلاخ مرحلہ وضع اصطلاحات کا تھا۔ اس میں بہت کچھ اختلاف اور بحث کی گنجائش ہے۔ اس بارے میں ایک مدت کے تجربہ اور کامل غور و فکر اور مشورہ کے بعد میری یہ رائے قرار پائی ہے کہ تنہا نہ تو ماہر علم صحیح طور سے اصطلاحات وضع کر سکتا ہے اور نہ ماہر لسان۔ ایک کو دوسرے کی ضرورت ہے۔ اور ایک کی کمی دوسرا پورا کرتا ہے۔ اس لئے اس اہم کام کو صحیح طور سے انجام دینے کے لئے یہ ضروری ہے کہ دونوں یک جا جمع کئے جائیں تاکہ وہ ایک دوسرے کے مشورہ اور مدد سے ایسی اصطلاحیں بنائیں جو نہ اہل علم کو ناگوار ہوں نہ اہل زبان کو۔ چنانچہ اسی اصول پر ہم نے وضع اصطلاحات کے لئے ایک ایسی مجلس بنائی جس میں دونوں جماعتوں کے اصحاب شریک ہیں۔ علاوہ ان کے

ہم نے اُن اہل علم سے بھی مشورہ کیا جو اس کی خاص اہلیت رکھتے ہیں اور بُعد مسافت کی وجہ سے ہماری مجلس میں شریک نہیں ہو سکتے۔ اس میں شک نہیں کہ بعض الفاظ غیر مانوس معلوم ہوں گے اور اہل زبان انہیں دیکھ کر ناک بہوں پڑھائیں گے۔ لیکن اس سے گزیر نہیں۔ ہیں بعض ایسے علوم سے واسطہ ہے جن کی ہوا تک ہماری زبان کو نہیں لگی۔ ایسی صورت میں سوائے اس کے چارہ نہیں کہ جب ہماری زبان کے موجودہ الفاظ خاص خاص مفہوم کے ادا کرنے سے قاصر ہوں تو ہم جدید الفاظ وضع کریں۔ لیکن اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ ہم نے محض ٹالنے کے لئے زبردستی الفاظ گھڑ کر رکھ دئے ہیں بلکہ جس نہج پر اب تک الفاظ بنتے چلے آئے ہیں اور جن اصول ترکیب و اشتقاق پر اب تک ہماری زبان کاربند رہی ہے، اس کی پوری پابندی ہم نے کی ہے۔ ہم نے اُس وقت تک کسی لفظ کے بنانے کی جرأت نہیں کی جب تک اُسی قسم کی متعدد مثالیں ہمارے پیش نظر نہ رہی ہوں۔ ہماری رائے میں جدید الفاظ کے وضع کرنے کی اس سے بہتر اور صحیح کوئی صورت نہیں۔ اب اگر کوئی لفظ غیر مانوس یا اجنبی معلوم ہو تو اس میں ہمارا قصور نہیں۔ جو زبان زیادہ تر شعر و شاعری اور قصص تک محدود ہو، وہاں ایسا ہونا کچھ تعجب کی بات نہیں۔ جس ملک سے ایجاد و اختراع کا مادہ سلب ہو گیا ہو۔ جہاں لوگ نئی چیزوں کے بنانے اور دیکھنے کے عادی نہ ہوں، وہاں جدید الفاظ کا

غیر مانوس اور اجنبی معلوم ہونا موجب حیرت نہیں۔ الفاظ کی حالت بھی انسانوں کی سی ہے۔ اجنبی شخص بھی رفتہ رفتہ مانوس ہو جاتے ہیں۔ اول اول الفاظ کا بھی یہی حال ہے۔ استعمال آہستہ آہستہ غیر مانوس کو مانوس کر دیتا ہے اور صحت و غیر صحت کا فیصلہ زمانہ کے ہاتھ میں ہوتا ہے۔ ہمارا فرض یہ ہے کہ لفظ تجویز کرتے وقت ہر پہلو پر کامل غور کر لیں، آئندہ چل کر اگر وہ استعمال اور زمانہ کی کسوٹی پر پورا اترتا تو خود ٹکسالی ہو جائیگا اور اپنی جگہ آپ پیدا کر لیگا۔ علاوہ اس کے جو الفاظ پیش کئے گئے ہیں وہ الہامی نہیں کہ جن میں رد و بدل نہ ہو سکے، بلکہ فرہنگ اصطلاحات عثمانیہ جو زیر ترتیب ہے پہلے اس کا مسودہ اہل علم کی خدمت میں پیش کیا جائے گا اور جہاں تک ممکن ہوگا اس کی اصلاح میں کوئی دقیقہ فرو گذاشت نہیں کیا جائے گا۔

لیکن ہماری مشکلات صرف اصطلاحات علمیہ تک ہی محدود نہیں ہیں۔ ہمیں ایک ایسی زبان سے ترجمہ کرنا پڑتا ہے جو ہمارے لئے بالکل اجنبی ہے، اس میں اور ہماری زبان میں کسی قسم کا کوئی رشتہ یا تعلق نہیں۔ اس کا طرز بیان، ادائے مطلب کے اسلوب، محاورات وغیرہ بالکل جدا ہیں۔ جو الفاظ اور جملے انگریزی زبان میں بالکل معمولی اور روزمرہ کے استعمال میں آتے ہیں، اُن کا ترجمہ جب ہم اپنی زبان میں کرنے بیٹھتے ہیں تو سخت دشواری پیش آتی ہے۔ ان تمام دشواریوں پر

غالب آنے کے لئے مترجم کو کیسا کچھ خونِ جگر کھانا نہیں پڑتا۔ ترجمہ کا کام، جیسا کہ عموماً خیال کیا جاتا ہے، کچھ آسان کام نہیں ہے۔ بہت خاک چھاننی پڑتی ہے تب کہیں گوہر مقصود ہاتھ آتا ہے۔ اس سرشت کا کام صرف یہی نہ ہوگا (اگرچہ یہ اس کا فرضِ اولین ہے) کہ وہ نصابِ تعلیم کی کتابیں تیار کرے، بلکہ اس کے علاوہ وہ ہر علم پر متعدد اور کثرت سے کتابیں تالیف و ترجمہ کرائے گا، تاکہ لوگوں میں علم کا شوق بڑھے، ملک میں روشنی پھیلے، خیالات و قلوب پر اثر پیدا ہو، جمالت کا استیصال ہو۔ جمالت کے معنی اب لاعلمی ہی کے نہیں بلکہ اس میں افلاس، کم ہمتی، تنگ دلی، کوتاہ نظری، بے غیرتی، بد اخلاقی سب کچھ آجاتا ہے۔ جمالت کا مقابلہ کر کے اسے پس پا کرنا سب سے بڑا کام ہے۔ انسانی دماغ کی ترقی علم کی ترقی ہے۔ انسانی ترقی کی تاریخ علم کی اشاعت و ترقی کی تاریخ ہے۔ ابتدائے آفرینش سے اس وقت تک انسان نے جو کچھ کیا ہے، اگر اس پر ایک وسیع نظر ڈالی جائے تو نتیجہ یہ نکلے گا کہ جوں جوں علم میں اضافہ ہوتا گیا، پچھلی غلطیوں کی صحت ہوتی گئی، تاریکی گھٹتی گئی، روشنی بڑھتی گئی، انسان میدانِ ترقی میں قدم آگے بڑھاتا گیا۔ اسی مقدس فرض کے ادا کرنے کے لئے یہ سرشت قائم کیا گیا ہے اور وہ اپنی بساط کے موافق اس کے انجام دینے میں کوتاہی نہ کرے گا۔

لیکن غلطی، تحقیق و جستجو کی گھات میں لگی رہتی ہے۔ ادب کا

کال ذوق سلیم ہر ایک کو نصیب نہیں ہوتا۔ بڑے بڑے نقاد اور مبہض فاش غلطیاں کر جاتے ہیں۔ لیکن اس سے ان کے کام پر حرف نہیں آتا۔ غلطی ترقی کے مانع نہیں ہے، بلکہ وہ صحت کی طرف رہنمائی کرتی ہے۔ پچھلوں کی بھول چوک آنے والے مسافر کو رستہ بھٹکنے سے بچا دیتی ہے۔ ایک جاپانی ماہر تعلیم (یرن کی کوچی) نے اپنے ملک کا تعلیمی حال لکھتے ہوئے اس صحیح کیفیت کا ذکر کیا ہے جو ہونہار اور ترقی کرنے والے افراد اور اقوام پر گزرتی ہے۔

”ہم نے بہت سے تجربے کئے اور بہت سی ناکامیاں اور غلطیاں ہوئیں، لیکن ہم نے ان سے نئے سبق سیکھے اور فائدہ اٹھایا۔ رفتہ رفتہ ہمیں اپنے ملک کی تعلیمی ضروریات اور امکانات کا صحیح اور بہتر علم ہوتا گیا اور ایسے تعلیمی طریقے معلوم ہوتے گئے جو ہمارے اہل وطن کے لئے زیادہ موزوں تھے۔ ابھی بہت سے ایسے مسائل ہیں جو ہمیں حل کرنے میں ’بہت سی ایسی اصلاحیں ہیں جو ہمیں عمل میں لانی ہیں‘ ہم نے اب تک کوشش کی اور ابھی کوشش کر رہے ہیں اور مختلف طریقوں کی برائیاں اور بھلائیاں دریافت کرنے کے درپے ہیں، تاکہ اپنے ملک کے فائدے کے لئے اچھی باتوں کو اختیار کریں اور رواج دیں اور برائیوں سے بچیں۔ اس لئے جو حضرات ہمارے کام پر تنقیدی نظر ڈالیں انہیں وقت کی تنگی، کام کا ہجوم اور اس کی اہمیت اور جاری مشکلات پیش نظر رکھنی چاہئیں۔ یہ پہلی سعی ہے اور پہلی سعی میں کچھ نہ کچھ خامیاں

ضرور رہ جاتی ہیں، لیکن آگے چل کر یہی خامیاں ہماری رہنما بنیں گی اور پختگی اور اصلاح تک پہنچائیں گی۔ یہ نقش اول ہے، نقش ثانی اس سے بہتر ہوگا۔ ضرورت کا احساس علم کا شوق، حقیقت کی لگن، صحت کی ٹوہ، جدوجہد کی رسائی خود بخود ترقی کے درجے طے کر لے گی۔

جاپانی بڑے فخر سے یہ کہتے ہیں کہ ہم نے تیس چالیس سال کے عرصے میں وہ کچھ کر دکھایا جس کے انجام دینے میں یورپ کو اتنی ہی صدیاں صرف کرنی پڑیں۔ کیا کوئی دن ایسا آئے گا کہ ہم بھی یہ کہنے کے قابل ہوں گے؟ ہم نے پہلی شرط پوری کر دی ہے یعنی بیجا قیود سے آزاد ہو کر اپنی زبان کو اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار دیا ہے۔ لوگ ابھی ہمارے کام کو تذبذب کی نگاہ سے دیکھ رہے ہیں اور ہماری زبان کی قابلیت کی طرف مشتتبہ نظریں ڈال رہے ہیں۔ لیکن وہ دن آنے والا ہے کہ اس ڈرے کا بھی ستارہ چمکے گا، یہ زبان علم و حکمت سے مالا مال ہوگی اور

اَعْلٰی حَضَرَتْ وَاَقْدَسْ کی نظر کیا اثر کی بدولت یہ دنیا کی مذہب و شایستہ زبانوں کی ہمسری کا دعوے کرے گی۔ اگرچہ اُس وقت ہماری سعی اور محنت حقیر معلوم ہوگی، مگر یہی شام غربت صبح وطن کی آمد کی خبر دے رہی ہے، یہی شب بیدار روز روشن کا جلوہ دکھائیں گی، اور یہی مشقت اُس قصر رفیع الشان کی بنیاد ہوگی جو آئندہ تعمیر ہونے والا ہے۔ اس وقت ہمارا کام صبر و استقلال سے میدان صاف کرنا،

داغ بیل ڈالنا اور نیو کھودنا ہے، اور فرہاد وار شیرینِ حکمت کی خاطر سنگلاخ پہاڑوں کو کھود کھود کر جوئے علم لانے کی سعی کرتا ہے۔ اور گو ہم نہ ہوں گے مگر ایک زمانہ آئیگا جب کہ اس میں علم و حکمت کے دریا بہیں گے اور ادبیات کی افتادہ زمین سرسبز و شاداب نظر آئے گی۔

آخر میں میں سرشت کے مترجمین کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنہوں نے اپنے فرض کو بڑی مستعدی اور شوق سے انجام دیا۔ نیز میں ارکانِ مجلس وضع اصطلاحات کا شکر گزار ہوں کہ ان کے مفید مشورے اور تحقیق کی مدد سے یہ مشکل کام بخوبی انجام پا رہا ہے۔ لیکن نصیحت کے ساتھ یہ سرشت جناب مسٹر محمد اکبر حیدری بی۔ اے متہد عدالت و تعلیمات و کو توالی و امور عامہ سرکار عالی کا ممنون ہے جنہیں ابتدا سے قیام و انتظام جامعہ عثمانیہ میں خاص انہماک رہا ہے۔ اور اگر ان کی توجہ اور امداد ہمارے شریک حال نہ ہوتی تو یہ عظیم الشان کام صورت پذیر نہ ہوتا۔ میں سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (آکسن) آئی۔ ای۔ ایس۔ ناظم تعلیمات سرکار عالی کا بھی شکریہ ادا کرتا ہوں کہ ان کی توجہ اور عنایت ہمارے حال پر مبذول رہی اور ضرورت کے وقت ہمیشہ بلا تکلف خوشی کے ساتھ ہمیں مدد دی۔

عبدالحق

ناظم سرشت تالیف و ترجمہ (عثمانیہ یونیورسٹی)

اَلْكَارِجَالُ الشَّيْخِ



- مولوی عبدالحق صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ ناظم۔
- قاضی محمد حسین صاحب۔ ایم۔ اے۔ ریٹائر۔۔۔ مترجم ریاضیات
- چودھری برکت علی صاحب بی۔ یس۔ سی۔۔۔ مترجم سائنس
- مولوی سید ہاشمی صاحب۔۔۔۔۔ مترجم تاریخ۔
- مولوی محمد الیاس صاحب برنی ایم۔ اے۔۔۔ مترجم معاشیات
- قاضی تلمذ حسین صاحب ایم۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم سیاسیات
- مولوی ظفر علی خاں صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم تاریخ۔
- مولوی عبدالماجد صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم فلسفہ و منطق
- مولوی عبدالحکیم صاحب شہر۔۔۔۔۔ مولف تاریخ اسلام
- مولوی سید علی رضا صاحب بی۔ اے۔۔۔۔۔ مترجم قانون۔
- مولوی عبداللہ العماوی صاحب۔۔۔۔۔ مترجم کتب عربی
- علاوہ ان مذکورہ بالا مترجمین کے مولوی حاجی
- صفی الدین صاحب ترجمہ شدہ کتابوں کو مذہبی نقطہ نظر
- سے دیکھنے کے لئے اور نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب
- طبا طبائی) ترجموں پر نظر ثانی کرنے کے لئے مقرر فرمائے گئے ہیں۔

ارکان مجلس و خطبات

مولوی مرزا مہدی خاں صاحب کوکب وظیفہ یاب سکر عالی (سابق ناظم مرم شہائی)
 مولوی حمید الدین صاحب بی۔ اے صدر دارالعلوم
 نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طباطبائی)
 مولوی حمید الدین صاحب سلیم
 مولوی عبدالحق بی۔ اے ناظم سررشتہ تالیف و ترجمہ

علاوہ ان مستقل ارکان کے ، مترجمین سررشتہ تالیف و ترجمہ نیز
 دوسرے اصحاب سے بلحاظ اُنکے فن کے مشورہ کیا گیا۔ مثلاً
 خان فضل محمد خان صاحب ایم۔ اے ریگلر (پرنسپل ٹی ہائی اسکول حیدرآباد)
 مولوی عبد الواسع صاحب (پروفیسر دارالعلوم حیدرآباد)
 پروفیسر عبدالرحمن صاحب بی۔ ایس۔ سی (نظام کالج)
 مرزا محمد ہادی صاحب بی۔ اے (پروفیسر کرپن کالج لکھنؤ)
 مولوی سلیمان صاحب ندوی

سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (ناظم تعلیمات حیدرآباد) وغیرہ

فہرست مضامین

ہند محاسبیات

نمبر	مضمون	صفحہ
۱	خطوط و سطوح	
۲	تعریفات ابتدائی اصول دو سطحی زاوے	۱
۳	تعریفات و مسائل مجسم زاوے	۴۳
۴	تعریفات و مسائل حوالہ کے محاور	۴۹
۵	فضا میں کسی نقطہ کے مقام کا تعین مجسم اشکال تعریفات اور ابتدائی مسائل مجسموں کی سطحیں اور حجم مستطیلی مجسم منشور محزوط مضلع پانچ منظم کثیر السطوح	۶۰ ۶۳ ۶۷ ۶۸ ۶۹ ۹۸

صفحہ	مضمون	نمبر
	گروشی مجسمات	۵
۱۰۹	اسطوانہ	
۱۱۰	ایک اسطوانہ کی سطح اور حجم	
۱۱۵	محزوط	۶
۱۱۷	ایک محزوط کی سطح اور حجم	
۱۲۰	محزوط ناقص، مضلع محزوط ناقص	
۱۲۹	کرہ	۷
۱۳۰	اساسی خواص	
۱۳۹	کرہ کی سطح	
۱۴۱	کرہ ناقص، قطعہ کرہ، منطقہ	
۱۴۲	کرہ کا حجم	
۱۴۹	کرہ پر حوالہ کے خط - عرض بلد و طول بلد	
۱۵۲	پچھانکوں کی منحنی سطحیں	
۱۵۴	کردی مثلث	
۱۶۷	عددی مشقوں کے جوابات	۸

ہندسہ مجسمات

خطوط و سطوح

تعریفات اور ابتدائی اصول

۱۔ اسکول جو میٹری، حصہ اول کی تعریفات کے بموجب
(۱) نقطہ وہ ہندسی مقدار ہے جس کی نہ لمبائی ہو، نہ چوڑائی
اور نہ موٹائی۔ (نقطہ کے طول، عرض، عمق تینوں نہیں ہوتے)
(۲) خط کی صرف لمبائی ہوتی ہے، لیکن چوڑائی اور
موٹائی نہیں ہوتی۔

(۳) سطح کی لمبائی اور چوڑائی دونوں ہوتی ہیں، لیکن
اس کی موٹائی نہیں ہوتی۔

(۴) مجسمہ لمبائی، چوڑائی اور موٹائی تینوں رکھتا ہے۔
پس نقطہ کا کوئی بُعد نہیں ہوتا
خط کا ایک بُعد ہوتا ہے
سطح کے دو بُعد ہوتے ہیں

مجسم کے تین مجہد ہوتے ہیں
۲۔ پس مجسم، سطحیں، خط، نقطے باہم یہ تعلق رکھتے ہیں۔

(۱) سطحیں مجسموں کا احاطہ کرتی ہیں۔
(۲) خط سطحوں کا احاطہ کرتے ہیں، اور سطحوں کا تقاطع خطوط پر ہوتا ہے۔

(۳) خطوط کی حد بندی نقطوں سے ہوتی ہے اور خط ایک دوسرے کو نقطوں پر قطع کرتے ہیں۔
یہ بھی یاد رکھنا چاہیے کہ ایک خط کسی سطح کو ایک یا ایک سے زیادہ نقطوں پر قطع کر سکتا ہے۔

۳۔ سطح مستوی یا محض مستوی سے مراد وہ سطح ہے کہ اگر اس پر کوئی دو نقطے لئے جائیں تو ان نقطوں کو ملانے والا مستقیم خط بالتمام سطح مذکور میں واقع ہو۔

جب تک اس کے خلاف بالتصریح نہ بیان کیا جائے اس حصہ میں خطوط مستقیم سے غیر متناہی طول کے مستقیم خط مراد ہونگے اور مستوی سطحوں سے غیر متناہی وسعت کی سطحیں مراد ہونگی۔

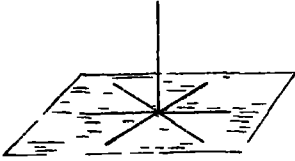
۴۔ جو خط ایک مستوی سطح میں کھینچے جائیں یا جن میں سے ایک مستوی سطح گزر سکے ان کو ہم سطح خط کہتے ہیں
۵۔ جن خطوط میں سے کوئی مستوی سطح نہ گزر سکے ان کو کانے یا معوج خط کہتے ہیں۔

۶۔ مستوی سطحیں متوازی اُس وقت کہلاتی ہیں جبکہ وہ ایک دوسرے کو نہ ملیں خواہ انہیں کتنا ہی بڑھایا جائے یا کتنی

ہی وسعت دی جائے۔

۷۔ ایک خط مستقیم اور سطح مستوی باہم متوازی اس وقت ہوتے ہیں جبکہ وہ ایک دوسرے سے نہ ملیں خواہ انہیں کتنا ہی بڑھایا جائے۔

۸۔ ایک مستقیم خط، کسی مستوی سطح پر عمود اس وقت ہوتا ہے جب یہ اس سطح پر کے



ہر ایک خط سے جو اس سے ملتا ہو زاویہ قائمہ بنائے،

اس کو اس طرح بھی بیان کرتے ہیں کہ یہ خط سطح مستوی پر عمود ہے۔

علوم متعارفہ

۱۔ ایک مستقیم خط کسی مستوی سطح پر کے دو نقطوں کو ملاتا ہے، اس خط کو خواہ کتنا ہی خارج کیا جائے یہ بالتمام اسی سطح میں واقع ہوگا۔

۲۔ ایک مستقیم خط میں سے یا دو نقاط مفروضہ میں سے بیشمار مستوی سطحیں گزر سکتی ہیں، کیونکہ ظاہر ہے کہ اگر ایک مستوی سطح کو ایک ایسے مستقیم خط کے گرد جو اس میں واقع ہو گھمایا جائے تو یہ بالتواتر بیشمار مقامات میں سے گزرے گی۔

۳۔ اگر ایک لامحدود مستوی سطح ایک ایسے مستقیم خط کے گرد

گھومے جو اس میں واقع ہو تو یہ سطح فضا کے کسی ایسے نقطہ میں سے جو خط مذکور کے باہر ہو گزاری جاسکتی ہے۔

ان اصولوں سے یہ واضح ہوتا ہے کہ ایک مستقیم خط کا تعلق کسی مستوی سطح کے ساتھ تین طرح کا ہو سکتا ہے۔

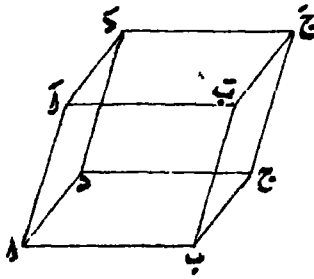
(۱) یا یہ مستقیم خط، سطح مستوی کے متوازی ہوگا جس صورت میں اس کا کوئی نقطہ سطح مستوی کے ساتھ مشترک نہ ہوگا
(۲) یا یہ خط، سطح مستوی کو کاٹے گا، جس صورت میں اس کا ایک (اور صرف ایک ہی) نقطہ سطح مستوی کے ساتھ مشترک ہوگا۔

(۳) یا یہ سطح مستوی میں واقع ہوگا، جس صورت میں اس کے لایا ہوا نقطہ سطح مستوی کے ساتھ مشترک ہونگے۔
نیز ایک مستقیم خط کا تعلق کسی اور مستقیم خط کے ساتھ تین طرح کا ہو سکتا ہے

اگر خطوط ہم سطح ہوں تو
(۱) یہ ایک دوسرے کو قطع کریں گے
یا (۲) ایک دوسرے کے متوازی ہوں گے
اگر خطوط ہم سطح نہ ہوں تو

(۳) نہ یہ ایک دوسرے کو قطع کریں گے اور نہ متوازی ہوں گے۔

مثلاً ساتھ کی شکل میں (۱) کنارے 'ا ب'، 'ب ج' مستوی سطح 'ا ب ج د' میں واقع ہیں اور ایک دوسرے کو قطع کرتے



ہیں۔ (۲) ا ب اور
د ج ایک ہی سطح میں
ہیں اور ایک دوسرے
کے متوازی ہیں (۳)
ا ب اور ا د میں
سے کوئی مستوی سطح نہیں
گزر سکتی، یہ کانے خط

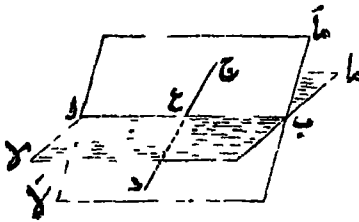
ہیں اس لئے نہ یہ متقاطع ہیں اور نہ متوازی۔

مسئلہ اثباتی ۱ [اقلیدس م ۱۱ ش ۲]

دو متقاطع خطوط مستقیم میں سے ایک اور صرف ایک ہی سطح
مستوی گزر سکتی ہے۔

فرض کرو کہ خطوط مفروضہ ا ب اور ج د ایک دوسرے
کو ع پر قطع کرتے ہیں۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے
کہ ا ب اور ج د میں سے
ایک اور صرف ایک ہی سطح
مستوی گزر سکتی ہے۔



ثبوت۔ کوئی سطح مستوی لا ما ایسی

لو جو ا ب میں سے گزرتی ہو، تب اس سطح مستوی کو
ا ب کے گرد اتنا گھماؤ کہ یہ نقطہ ج میں سے گزرے اور

لاما کے مقام پر آجائے، اس طرح سے گھومنے والی سطح
مستوی کا مقام متعین ہو جائے گا۔ اس سے ثابت ہوا کہ صرف
ایک ہی سطح مستوی خط مستقیم AB اور نقطہ C میں سے
گزر سکتی ہے، اور یہی ثابت کرنا تھا۔

نتیجہ صریح - اگر تین مستقیم خط ایسے ہوں کہ ان میں سے
کوئی دو ایک دوسرے کو قطع کریں تو یہ تینوں خط ایک ہی
سطح مستوی میں واقع ہونگے۔

نتائج

کسی سطح مستوی کا مقام متعین ہو جاتا ہے اگر یہ
(۱) ایک دئے ہوئے خط مستقیم میں سے اور ایک ایسے
نقطہ میں سے جو اس خط کے باہر واقع ہو گزرے۔

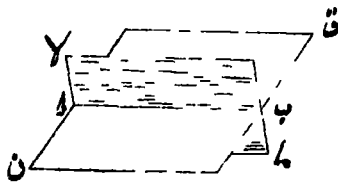
(۲) دو متقاطع مستقیم خطوں میں سے گزرے۔

(۳) تین ایسے نقاط میں سے گزرے جو ایک ہی خط مستقیم
پر واقع نہ ہوں۔

(۴) دو متوازی مستقیم خطوں میں سے گزرے۔

مسئلہ اثباتی ۲ [آقلیدس م ۱۱ ش ۳]

دو متقاطع مستوی سطحیں ایک دوسرے کو ایک خط مستقیم
پر کاٹتی ہیں اور اس خط کے باہر کسی اور نقطہ پر نہیں کاٹ
سکتیں۔



یہ ثابت کرنا مقصود ہے

کہ متقاطع سطوح مستویہ

ن ق، لاہا خط مستقیم

ا ب پر ایک دوسرے کو

کاٹتی ہیں اور اس کے باہر کسی اور نقطہ پر نہیں کاٹ سکتیں

ثبوت۔ فرض کرو کہ ا اور ب مستوی سطوح ن ق

اور لاہا دونوں پر واقع ہیں، تب ا اور ب کو ملانے والا

خط مستقیم بالتمام دونوں مستوی سطحوں میں واقع ہوگا یعنی

مستوی سطحیں ایک دوسرے کو خط مستقیم ا ب پر قطع کریں گی۔

نیز چونکہ یہ دونوں سطحیں ا ب میں سے گزرتی ہیں اسلئے

ان سطحوں کا کوئی مشترک نقطہ ا ب کے باہر نہیں ہو سکتا

ورنہ یہ سطحیں ایک دوسرے پر منطبق ہو جائیں گی۔

نوٹ۔ اس سے معلوم ہوگا کہ اگر (۱) تین یا تین سے زیادہ متراکز

خطوط مستقیم ایک اور خط مستقیم کو قطع کریں تو یہ سب خطوط ہم سطح ہونگے۔

۲۔ اگر تین یا تین سے زیادہ متوازی خط ایک دسے ہوئے خط مستقیم

کو قطع کریں تو یہ سب خطوط ہم سطح ہونگے۔

مستوی سطح کی تشکیل

پس ایک مستوی سطح کی تشکیل حسب ذیل طریقوں سے

ہو سکتی ہے۔

(۱) ایک ایسے خط مستقیم سے، جو اپنے ایک نقطہ کے گرد گردش

کرے اور ساتھ ہی ایک ثابت خط مستقیم پر بالتواتر پھسلتا جائے
(۲) ایک ایسے خط مستقیم سے جو دو ثابت متقاطع خطوط پر یا دو
ثابت متوازی خطوط پر علی التواتر پھسلے۔

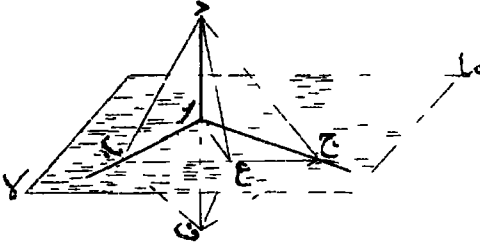
(۳) ایک ایسے خط مستقیم سے، جو ہمیشہ اپنے متوازی حرکت
کرے اور ایک ثابت خط مستقیم پر پھسلے۔

فضا میں کے مثلث اور ذواربعۃ الاضلاع ہرثلث

کے اضلاع لازماً ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہوتے ہیں (مسئلہ ۱)
لیکن ضروری نہیں کہ ایک ذواربعۃ الاضلاع کے ضلعے بھی ایک
ہی سطح مستوی میں واقع ہوں جیسا کہ ایک مستوی ذواربعۃ الاضلاع
کو اس کے ایک قطر پر تہ کرنے سے ظاہر ہے، اس طرح سے جو
ذواربعۃ الاضلاع بنتا ہے اس کو کانامعوج ذواربعۃ الاضلاع کہتے
ہیں، اس کے دو متصل اضلاع ایک مستوی سطح میں ہوتے ہیں اور
باقی دو دوسری مستوی سطح میں۔

مسئلہ اثباتی ۳ [آئلیڈس م ۱۱ ش ۴]

اگر ایک خط مستقیم دو متقاطع خطوط مستقیم میں سے ہر ایک
پر عمود ہو اور ان کے نقطۂ تقاطع میں سے گزرے، تو ثابت
کرو کہ یہ اُس مستوی سطح پر بھی عمود ہوگا جو متقاطع خطوط
میں سے گزرتی ہے۔



فرض کرو کہ ا د
ہر دو خطوط مستقیم ا ب
اور ا ج پر عمود ہے
یہ ثابت کرنا مقصود
ہے کہ ا د مستوی سطح
لاہما پر بھی عمود ہوگا جو
ا ب اور ا ج میں
سے گزرتی ہے۔

سطح مستوی لاہما پر کوئی خط ا ع کھینچو جو ا میں سے گزرے
نیز اسی سطح مستوی میں ایک اور خط ب ج کھینچو جو ا ب ا ع
ا ج کو بالترتیب ب ا ع ج پر قطع کرے۔
د ا کو ف تک اتنا خارج کرو کہ ا ف ا د کے مساوی
ہو، د ب ا د ع ج کو ملاؤ، نیز ف ب ا ف ع ف ج
کو ملاؤ۔

ثبوت۔ مثلثات ب ا د اور ب ا ف میں
ب ا د ا ف کی تفسیف زاویہ قائمہ پر کرتا ہے۔

$$ب د = ب ف$$

اسی طرح سے ج د = ج ف

پس اگر $\triangle ب ف ج$ کو اس کے قاعدہ ب ج کے
گرد اتنا گھمایا جائے کہ راس ف، $\triangle ب د ج$ کی سطح
میں آجائے تو نقطہ ف د پر منطبق ہوگا کیونکہ مثلثات

ب ف ج اور ب د ج ہر طرح سے مساوی ہیں

∴ ع ف ا ع د پر منطبق ہوگا

یعنی ع ف = ع د

اب مثلثات د ا ع اور ف ا ع میں

د ا = ف ا ع د = ع ف اور ا ع مشترک ہے

اسلئے د ا ع = ف ا ع

∴ د ا کسی مستقیم خط ا ع پر (جو اس سے سطح مستوی
لاما پر ملتا ہے) عمود ہے۔

یعنی د ا عمود ہے ا ب اور ا ج کی سطح مستوی پر

سوالات اور مشقیں

- ۱۔ ”خطوط مستقیم متوازی اُس وقت ہوتے ہیں جبکہ وہ ایک دوسرے سے نہیں خواہ انہیں کتنا ہی خارج کیا جائے“ متوازی خطوط کی مندرجہ بالا تعریف میں کیا کمی ہے؟ اپنے جواب کی توضیح مثال کے ذریعہ کرو۔
- ۲۔ ایک کمرہ کی دیواروں اور کناروں سے مندرجہ ذیل کی مثالیں پیش کرو۔

(۱) متوازی سطحیں

(۲) ایسے خط جو ایک سطح مستوی کے متوازی ہوں

(۳) ایسے خط جو ایک سطح مستوی پر عمود ہوں

(۴) کانے خطوں کے زوج۔

۳۔ ”سطحیں ایک دوسرے کو خطوط پر قطع کرتی ہیں“ کیا ضروری ہے کہ یہ خط مستقیم ہوں؟ اگر نہیں تو چند ایسی سطحوں کی مثالیں دو جن کے تقاطع سے معنی خط پیدا ہوتے ہیں۔

۴۔ ایک خط مستقیم کے کسی نقطہ معلومہ میں سے

(۱) دو ابعاد کی فضا میں

(۲) تین ابعاد کی فضا میں

کتنے مستقیم خط کھینچے جاسکتے ہیں جو ایک دئے ہوئے خط مستقیم پر عمود ہوں۔
۵۔ دو پنسلوں کے ذریعہ اس امر کی توضیح کرو کہ اگر ایک خط کسی سطح مستوی میں کے ایک خط پر عمود ہو تو اس سے لازم نہیں آتا کہ یہ اس سطح پر بھی عمود ہوگا۔

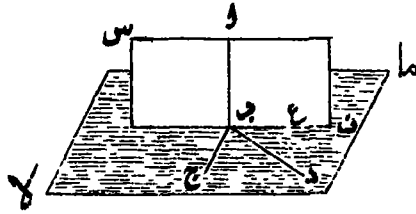
۶۔ ثابت کرو کہ فضا کے کسی نقطہ میں سے تین ایسے خط کھینچے جاسکتے ہیں جن میں سے ہر ایک باقی دو پر عمود ہو۔

نیز ثابت کرو کہ اس صورت میں ہر خط باقی دو کی سطح مستوی پر عمود ہوگا، اس امر کی توضیح کرہ کی دیواروں اور کناروں سے کرو۔

۷۔ ایک دائرہ کے مرکز و میں سے دو دائرہ کی سطح پر عمود کھینچا گیا ہے، ثابت کرو کہ محیط پر کے سب نقطے اسے متساوی نصفوں میں

مسئلہ اثباتی ۴ [افلیدس م ۱۱ ش ۵]

ایک خط مستقیم کے کسی نقطہ مقررہ میں سے اس خط پر عمود کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ یہ سب عمود ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ خطوط ب ج ، ب د ، ب ع میں سے ہر ایک
ا ب پر عمود ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ب ج ، ب د ، ب ع ہم سطح
ہیں۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ ب ج اور ب د میں سے گزرنیوالی
مستوی سطح لا ما ہے اور ا ب اور ا ع میں سے گزرنیوالی
مستوی سطح س ف ہے۔

نیز فرض کرو کہ سطوح س ف اور لا ما ایک دوسرے
کو خط مستقیم ب ف پر قطع کرتی ہیں
چونکہ ا ب عمود ہے ب ج اور ب د پر

∴ ا ب ، ب ف پر بھی عمود ہے کیونکہ ب ف خطوط ب ج ،
ب د کی سطح مستوی میں واقع ہے اور ا ب سے ب پر ملتا ہے [سندہ ۳]
اس لئے زوایا ا ب ع ، ا ب ف دونوں قائمے

ہیں اور دونوں ایک ہی سطح مستوی س ف میں واقع ہیں

گیا ہے کہ اس کے دونوں چھوٹے کنارے میز سے مس کرتے ہیں بتاؤ کہ شکن کیوں انتصابی ہے؟

۳۔ یہ دیکھنے کے لئے کہ ایک سطح متوازی الافقی ہے یا نہیں، ثابت کرو کہ سپرٹ لیول کے ساتھ دو مشاہدے کا فی ہیں بشرطیکہ اس کے دونوں محل ایک دوسرے کے متوازی نہ ہوں۔

۴۔ ایک افقی سطح پر ایک دائرہ کھینچا گیا ہے، جس کا نصف قطر ۲ و ۴ سنتی میٹر ہے، دائرے کے مرکز و سے ایک انتصابی خط و ن ۵ و ۶ سنتی میٹر لمبا کھینچا گیا ہے، نقطہ ن کا فاصلہ محیط پر کے کسی نقطہ سے معلوم کرو اور ثابت کرو کہ محیط پر کے سب نقطوں کے لئے یہ فاصلہ وہی رہتا ہے۔

۵۔ دو خطوط مستقیم ا ب اور ج د ایک دوسرے کی وپر تنصیف کرتے ہیں اور و ن دونوں پر عمود ہے، ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ ن ا} = \text{ن ب} \quad (۲) \text{ ن ج} = \text{ن د}$$

اور یہ نتیجہ ا ب اور ج د کے زاویہ تقاطع پر موقوف نہیں۔

اگر ا ب = ۳ و ۶، ج د = ۱ و ۴، و ن = ۲ و ۴ تو ن ا اور ن ج کے طول معلوم کرو۔

۶۔ ا ب ج د ایک افقی مربع ہے اور اس کے وسطی نقطہ (یعنی اس کے قطروں کے نقطہ تقاطع) و پر ایک انتصابی سلاخ و ن ثابت کر دی گئی ہے اور اس کے سرے ن کو ڈوروں کے ذریعہ مربع کے راسوں کے ساتھ ملا دیا گیا ہے۔

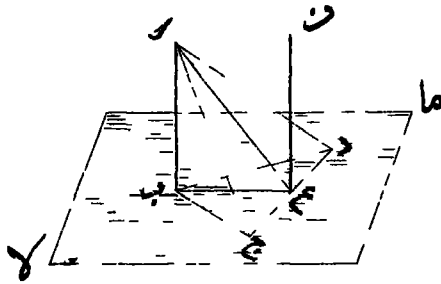
د ا، ثابت کرو کہ ن ا، ن ب، ن ج، ن د سب

مساوی ہیں۔

- (۲) اگر مربع کا ہر ایک ضلع ۲۰ سنٹی میٹر ہو اور سلاخ کی بلندی ۴۰ سنٹی میٹر، تو ن ل کا طول قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔
- (۳) اگر ن ل ۸۵ سنٹی میٹر اور سلاخ کی بلندی ۷۵ سنٹی میٹر ہو تو مربع کا ضلع قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

مسئلہ اثباتی ۵ [اقلیدس م ۱۱ ش ۸]

دو خطوط مستقیم متوازی ہیں اور ان میں سے ایک کسی سطح مستوی پر عمود ہے، کثابت کرو کہ دوسرا خط بھی اسی سطح مستوی پر عمود ہوگا



فرض کرو کہ ل ا ب اور ف ع دو متوازی مستقیم خط ہیں جو سطح مستوی ل ا م ا کو ب اور ع پر کاٹتے ہیں، نیز فرض کرو کہ ل ا ب سطح مستوی پر عمود ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ف ع بھی سطح مستوی ل ا م ا پر عمود ہوگا۔ ل ا ع اور ب ع کو ملاؤ اور سطح مستوی ل ا م ا میں خط

مستقیم ج ع د کھینچو جو ع میں سے گزرے اور ب ع پر عمود ہو، نیز ع ج اور ع د کو مساوی بناؤ۔

ب ج، ب د کو نیز ا ج، ا د کو ملاؤ
ثبوت۔ چونکہ ع ب، ج د کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتے ہیں
∴ ب ج = ب د

اور مثلثات ا ب ج اور ا ب د میں

چونکہ ب ج = ب د، ا ب مشترک ہے

اور ∴ ا ب ج = ا ب د

کیونکہ ا ب عمود ہے ب ج اور ب د کی سطح مستوی پر

∴ ا ج = ا د

نیز ∴ ج ع ا اور د ع ا میں

چونکہ ج ع = د ع، ع ا مشترک ہے اور ا ج = ا د

∴ ج ع ا = د ع ا

یعنی ج ع، د ع ا پر عمود ہے

لیکن بموجب عمل ج ع، ع ب سے زاویہ قائمہ بناتا ہے

∴ ج ع عمود ہے ع ا اور ع ب کی سطح مستوی پر

اور ع ف بھی اسی سطح مستوی میں واقع ہے کیونکہ ع ا، ع ب

دونوں متوازیات ا ب اور ف ع کی سطح مستوی میں واقع ہیں۔

∴ ج ع بھی ع ف پر عمود ہے

نیز چونکہ ا ب اور ف ع متوازی ہیں اور مفروضات کی رو سے

۱۔ ا ب ع قائمہ ہے

۲۔ ف ع ب بھی قائمہ ہے

پس ف ع خطوط ع ب اور ع ج پر عمود ہونے کی وجہ سے
مستوی لایا پر بھی عمود ہے جس میں یہ دونوں واقع ہیں۔
برعکس اس کے اگر ا ب اور ف ع دونوں سطح مستوی لایا
پر عمود ہوں تو وہ ایک دوسرے کے متوازی ہونگے۔

بوجب سابقہ اوپر کے عمل سے ثابت کرو کہ ج ع عمود ہے

ع ا اور ع ب کی سطح مستوی پر
اب مفروضات سے واضح ہے کہ ج ع، ع ف پر عمود ہے
۳۔ ف ع خطوط ع ا اور ع ب کی سطح میں واقع ہے۔

لیکن چونکہ ا ب بھی ع ا اور ع ب کی سطح مستوی میں واقع ہے
۴۔ ا ب اور ف ع ہم سطح ہیں۔

اور چونکہ مفروض کی رُو سے زاویے ا ب ع اور ف ع ب قائمے ہیں
اس لئے ا ب متوازی ہے ف ع کے اور یہی ثابت کرنا تھا۔

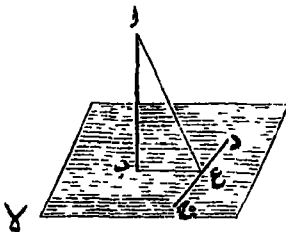
فرع۔ اگر ا ب سطح مستوی لایا پر عمود ہو اور اس کے پائین ب سے
سطح پر کسی خط ج د پر عمود ب ع

کھینچا جائے تو ا اور ع کو ملانیوالا خط

ج د پر عمود ہوگا۔ ع ج اور ع د
کو ایک دوسرے کے مساوی بناؤ۔

ب ج اور ب د کو نیز

ا ج اور ا د کو ملاؤ



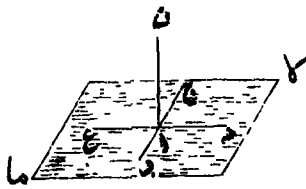
۴

ثبوت قریب قریب وہی ہے جو اوپر دیا گیا۔
اس مشہور نتیجہ کو ”تین عمودوں کا مسئلہ“ کہتے ہیں۔

مسئلہ اثباتی ۶

کسی ایسے نقطہ سے جو ایک سطح مستوی پر واقع ہو یا اس کے باہر، صرف ایک ہی مستقیم خط کھینچا جاسکتا ہے جو سطح مستوی پر عمود ہو۔

(۱)، فرض کرو کہ نقطہ مفروضہ ۱ سطح مستوی لاما پر واقع ہے
سطح مستوی میں کوئی خط



ب ج کو جو ۱ میں
سے گزرتا ہو

فرض کرو کہ ایک

خط ان 'ب ج' کے

ساتھ زاویہ قائمہ بناتا ہے

اور اس کے گرد گردش کرتا ہے، تب ان ایک ایسی سطح
مرسم کریگا جو ب ج پر عمود ہوگی، فرض کرو کہ یہ سطح مستوی
لاما کو خط مستقیم د ا ع پر قطع کرتی ہے۔

اب جبکہ ان گردش کر کے ا د سے ا ع کے مقام پر
آتا ہے تو اثنائے حرکت میں لازماً یہ ایک ایسے محل میں سے
گزرتا ہے جس میں یہ د ع پر عمود ہوتا ہے، یعنی ب ج اور
د ع دونوں پر عمود ہوتا ہے، گو یا سطح مستوی لاما پر عمود ہوتا ہے

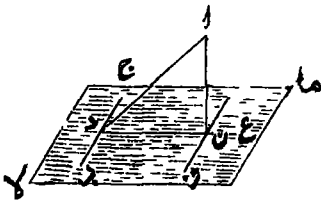
(۲) فرض کرو کہ نقطہ مفروضہ a سطح مستوی $لاما$ کے باہر واقع ہے۔

سطح مستوی میں کوئی خط $ب ج$ کھینچو اور a سے $ب ج$ پر عمود $a د$ نکالو۔

سطح مستوی $لاما$ میں $ب ج$ پر عمود $د ع$ کھینچو۔
فرض کرو کہ $ان$ عمود ہے نقطہ a سے $د ع$ پر۔

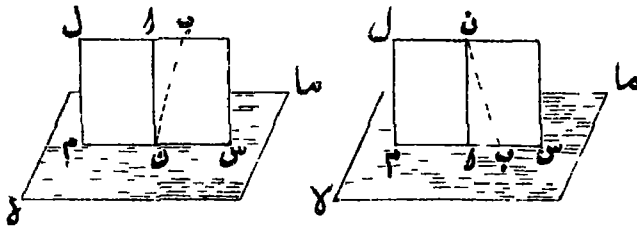
تب $ان$ سطح مستوی $لاما$ پر عمود ہوگا۔

ثبوت۔ نقطہ $ن$ میں سے
 $ن ف$ ، $ب ج$ کے متوازی
کھینچو۔



اب چونکہ $ب ج$ دونوں خطوط $د ا$ اور $د ع$ پر عمود ہے اسلئے
یہ سطح مستوی $لاما$ پر بھی عمود ہے
لہذا $ن ف$ بھی سطح مستوی $لاما$ پر عمود ہے [مسئلہ ۵]
∴ $ان ف$ قائمہ ہے

یعنی $ان$ عمود ہے $ن ف$ اور $د ع$ دونوں پر
یعنی $ان$ سطح مستوی $لاما$ پر عمود ہے
(۳) کسی نقطہ $ن$ سے سطح مستوی $لاما$ پر ایک اور
صرف ایک ہی عمود کھینچ سکتا ہے خواہ نقطہ $ن$ سطح مستوی
پر واقع ہو یا اس کے باہر۔



اگر دو عمود کھینچنا ممکن ہو تو فرض کرو کہ نقطہ ن سے سطح مستوی لاما پر دو عمود ن ا، ن ب کھینچے گئے ہیں، نیز فرض کرو کہ وہ سطح مستوی جون ا، ن ب میں سے گزرتی ہے سطح مستوی لاما کو خط مستقیم م س پر قطع کرتی ہے تب ن ا، ن ب دونوں ایک ہی سطح میں م س پر عمود ہیں جو صریحاً ناممکن ہے۔

مشقیں

- ۱۔ ایک سطح مستوی کے کسی نقطہ پر ایک سیدھی سلاخ کو عمود وار کھڑا کرنا مقصود ہے، بتاؤ کہ یہ عمل دو گلیوں کی مدد سے کس طرح ہو سکتا ہے
- ۲۔ ایک ایسے مستقیم خط کا مقام معلوم کرنا مطلوب ہے جو کسی نقطہ بیرونی سے سطح مستوی لاما پر عمود ہو، بتاؤ کہ اس غرض کے لئے ایک سیدھی سلاخ اور گنتے کو عمل مسئلہ ۲ شکل ۲ کے مطابق کس طرح استعمال کر سکتے ہیں۔

۳۔ کسی مجسم کی ایک مستوی سطح پر ایک خط مستقیم ب ج کھینچا گیا ہے

اور ایک نقطہ Δ سطح مستوی کے باہر واقع ہے [دیکھو شکل ۲ مسئلہ ۱] ایک ایسے مستقیم خط کا مقام دریافت کرنا مقصود ہے جو Δ میں سے گزرے اور B ج پر عمود ہو، بتاؤ کہ ایسا کرنے کا معمولی طریقہ [اسکول جو میٹری مسئلہ عملی ۳] کیوں یہاں کارآمد نہیں ہوتا۔

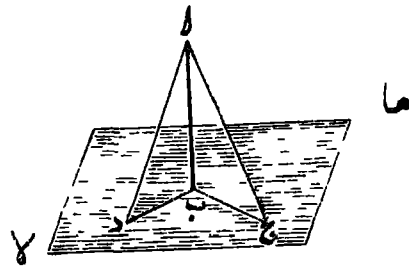
پٹری اور پرکار کی مدد سے کوئی اور مناسب عمل دریافت کرو جس سے مطلوبہ عمود Δ کا پایہ Δ معلوم ہو سکے اور اس کی بنا پر بتاؤ کہ کس طرح نقطہ Δ سے سطح مستوی پر عمود کھینچ سکتا ہے۔

[علاوہ اس کے ایک نقطہ بیرونی سے سطح مستوی پر عمود کھینچنے کے لئے دیکھو اگلے مسئلہ کی مشق ۳]

مسئلہ اشباتی ۷

(۱) اُن سب خطوط میں سے جو کسی نقطہ بیرونی سے ایک سطح مستوی تک کھینچے جائیں عمود سب سے چھوٹا ہوتا ہے۔

(۲) نقطہ مفروضہ میں سے گزرنے والے مائل خطوط میں سے وہ سب خط آپس میں مساوی ہونگے جن کے پائے عمود کے پایہ سے مساوی فاصلوں پر ہوں۔



(۱) فرض کرو کہ کسی بیرونی نقطہ A سے سطح مستوی AB پر A ب عمود اور AC کوئی خط مائل کھینچا گیا ہے یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ A ب چھوٹا ہے AC سے،
 AC کو ملاؤ

ثبوت۔ چونکہ AB سطح مستوی AB پر عمود ہے اس لئے یہ AC پر بھی عمود ہے کیونکہ خط AC AB سطح مستوی AB میں واقع ہے اور AB سے B پر ملتا ہے۔

پس مثلث ABC میں
 $\angle C$ AC ب چھوٹا ہے $\angle B$ سے
 $\therefore AB$ چھوٹا ہے AC سے

(۲) فرض کرو کہ خطوط مائل AC اور AD سطح مستوی AB کو C اور D پر قطع کرتے ہیں اور نقاط C اور D کے فاصلے عمود AB کے پایہ B سے مساوی ہیں۔

یعنی $BC = BD$

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ $AC = AD$

ثبوت۔ چونکہ AB سطح مستوی AB پر عمود ہے اس لئے یہ اس سطح میں کے خطوط BC ، BD دونوں پر عمود ہے جو اس سے نقطہ B پر ملتے ہیں۔

پس مثلثات ABC ، ABD ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

کیونکہ AB دونوں میں مشترک ہے، $BC = BD$ اور

ا ب ج = ا ب د

ا ج = ا د

مشقیں

۱۔ کسی نقطہ بیرونی سے ایک سطح مستوی پر مساوی مائعات کھینچے گئے ہیں انکے پایوں کا طریق دریافت کرو

۲۔ مثلث ا ب ج کے باہر ایک نقطہ ن ہے جس کے فاصلے رأسوں سے مساوی ہیں، نقطہ ن سے مثلث کی سطح پر عمود نکالا گیا ہے جو اس کو سس پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ سس مثلث کے بیرونی دائرہ کا مرکز ہے۔

اگر مثلث ا ب ج کا زاویہ ج قائمہ ہو اور ضلع $\angle = ۸$ و $\angle = ۴$ ،
 $\angle = ۶$ و $\angle = ۳$ اور سس ن = $\angle = ۱۰$ تو ن کا طول دریافت کرو۔
 ۳۔ پٹری پر کار اور ایک سیدھی سلاخ کی مدد سے ایک سطح مستوی پر کسی نقطہ بیرونی سے عمود نکالنے کا علی طریقہ دریافت کرو، سلاخ کی لمبائی مطلوبہ عمود سے زیادہ ہے۔

۴۔ تین مستقیم خط ایک نقطہ پر ملتے ہیں مگر ہم سطح نہیں، ایک اور مستقیم خط کھینچنے کا ہندسی عمل دریافت کرو جو ان تینوں خطوط سے مساوی زاوے بنائے۔

۵۔ ایک خط مستقیم ا ب سطح مستوی لاما میں واقع ہے اور کسی بیرونی نقطہ ن سے سطح مستوی پر عمود ن ق نکالا گیا ہے۔
 (۱) اگر ق ر، ا ب پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ ن ر بھی

(۱) فرض کرو کہ کسی بیرونی نقطہ A سے سطح مستوی ABC پر AB عمود اور AC کوئی خط مائل کھینچا گیا ہے یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ AB چھوٹا ہے AC سے،
 BC کو ملاؤ

ثبوت۔ چونکہ AB سطح مستوی ABC پر عمود ہے اس لئے یہ BC پر بھی عمود ہے کیونکہ خط BC سطح مستوی ABC میں واقع ہے اور AB سے B پر ملتا ہے۔

پس مثلث ABC میں
 $AC > AB$ چھوٹا ہے AB سے
 AB چھوٹا ہے AC سے

(۲) فرض کرو کہ خطوط مائل AC اور AD سطح مستوی ABC اور D پر قطع کرتے ہیں اور نقاط C اور D کے فاصلے عمود AB کے پایہ B سے مساوی ہیں۔
 یعنی $BC = BD$

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ $AC = AD$
 ثبوت۔ چونکہ AB سطح مستوی ABC پر عمود ہے اس لئے یہ اس سطح میں کے خطوط BC ، BD دونوں پر عمود ہے جو اس سے نقطہ B پر ملتے ہیں۔

پس مثلثات ABC ، ABD ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں۔

کیونکہ AB دونوں میں مشترک ہے، $BC = BD$ اور

۱ ب ج = ۱ ب د

∴ ۱ ج = ۱ د

مشقیں

۱۔ کسی نقطہ بیرونی سے ایک سطح مستوی پر مساوی مائعات کھینچے گئے ہیں انکے پایوں کا طریق دریافت کرو

۲۔ مثلث ۱ ب ج کے باہر ایک نقطہ ن ہے جس کے فاصلے راسوں سے مساوی ہیں، نقطہ ن سے مثلث کی سطح پر عمود نکالا گیا ہے جو اس کو سس پر قطع کرتا ہے، ثابت کرو کہ سس مثلث کے بیرونی دائرہ کا مرکز ہے۔

اگر مثلث ۱ ب ج کا زاویہ ج قائمہ ہو اور ضلع ۱ ا = ۸، ۱ ب = ۶، ۱ ج = ۱۰، تو ن ۱ کا طول دریافت کرو۔

۳۔ پٹری پر کار اور ایک سیدھی سلاخ کی مدد سے ایک سطح مستوی پر کسی نقطہ بیرونی سے عمود نکالنے کا علی طریقہ دریافت کرو، سلاخ کی لمبائی مطلوبہ عمود سے زیادہ ہے۔

۴۔ تین مستقیم خط ایک نقطہ پر ملتے ہیں مگر ہم سطح نہیں، ایک اور مستقیم خط کھینچنے کا ہندسی عمل دریافت کرو جو ان تینوں خطوط سے مساوی زاوے بنائے۔

۵۔ ایک خط مستقیم ۱ ب سطح مستوی لاما میں واقع ہے اور کسی بیرونی نقطہ ن سے سطح مستوی پر عمود ن ق نکالا گیا ہے۔

(۱) اگر ق ر، ۱ ب پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ ن ر بھی

۱ ب پر عمود ہوگا۔

(۲) اگر ن ر، ۱ ب پر عمود ہو تو ثابت کرو کہ ق ر بھی ۱ ب پر عمود ہوگا۔

۷۔ ایک مربع ۱ ب ج د کا ضلع ۰.۹۶ میٹر ہے، اس کے وسطی نقطہ ق پر ایک سلاخ ق ن (طول = ۴۰ ذ میٹر) ثابت کر دی گئی ہے جو مربع کی سطح پر عمود ہے، اگر ضلع ب ج کا وسطی نقطہ ر ہو تو ج م ن ر ق کی قیمت اعشاریہ کے تیسرے مقام تک محسوب کرو۔

۷۔ دو مستوی سطحوں کا خط تقاطع ۱ ب ہے، اس پر کے کسی نقطہ ن سے مستوی سطحوں میں خطوط ن ق، ن ر کھینچے گئے ہیں جو دونوں ۱ ب پر عمود ہیں، ثابت کرو کہ اگر ن ق پر کے کسی نقطہ سے اُس مستوی سطح پر عمود نکالا جائے جس میں ن ق واقع ہے تو یہ عمود ن ق ن ر کی سطح مستوی میں واقع ہوگا۔

۸۔ ثابت کرو کہ

(۱) فضا میں کے وہ سب نقطے جو دو نقاط مفروضہ سے متساوی

افصل ہوں ایک مستوی سطح پر واقع ہوتے ہیں۔

(۲) فضا میں کے وہ سب نقطے جو تین غیر مسامت نقطوں سے متساوی

افصل ہوں ایک خط مستقیم پر واقع ہوتے ہیں۔

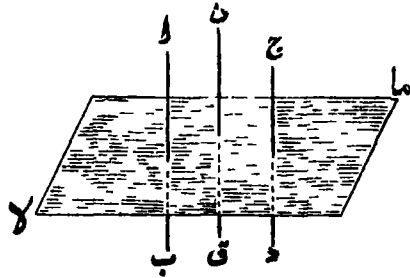
(۳) چار نقطے ایسے ہیں جو ایک ہی سطح مستوی پر واقع نہیں

ہوتے، ثابت کرو کہ ایسا نقطہ صرف ایک ہی ہو سکتا ہے جو ان چاروں

سے متساوی افصل ہو (یہ نقطہ دو مستقیم خطوں کا نقطہ تقاطع ہوگا)

مسئلہ اثباتی ۸ [اقلیدس م ۱۱ ش ۹]

جو خطوط مستقیم ایک مفروضہ خط مستقیم کے متوازی ہوں وہ ایک دوسرے کے متوازی ہوتے ہیں۔



فرض کرو کہ ا ب اور ج د دونوں خط مستقیم ن ق کے متوازی ہیں۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ا ب اور ج د بھی ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

ثبوت۔ فرض کرو کہ لاہا کوئی سطح مستوی ہے جو ن ق پر عمود ہے۔

اب چونکہ ا ب ، ن ق کے متوازی ہے

اسلئے ا ب بھی سطح مستوی لاہا پر عمود ہے [مسئلہ ۵]

اور چونکہ ج د ، ن ق کے متوازی ہے

اسلئے ج د بھی سطح مستوی لاہا پر عمود ہے [مسئلہ ۵]

اب چونکہ ا ب اور ج د دونوں سطح مستوی لاہا پر

عمود ہیں اس لئے یہ ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔
[مسئلہ کا عکس]

نوٹ۔ اس مسئلہ کا ثبوت اُس صورت میں جبکہ ا ب ج د ' ن ق ایک ہی سطح مستوی میں واقع ہوں پہلے دیا جا چکا ہے۔

(دیکھو اسکول جو میٹری مسئلہ نمبر ۱۵)

مشقیں

۱۔ تین مستقیم خط ا ب ، ج د ، ع ف ایک دوسرے کے مساوی اور متوازی ہیں لیکن ایک سطح مستوی میں واقع نہیں ہیں ثابت کرو کہ مثلث ا ب ج ع اور ب د ف ایک دوسرے کے ہر طرح سے مساوی ہیں۔

۲۔ اگر ایک معوج کثیر الاضلاع کے متصل اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملا دیا جائے تو ثابت کرو کہ جو شکل اس طرح سے بنے گی وہ متوازی الاضلاع ہوگی۔

۳۔ اگر ایک مثلث اپنے قاعدہ کے گرد گردش کرے تو ثابت کرو کہ اس کا رأس ایک دائرہ ہر قسم کرے گا۔

۴۔ افقی سطح پر ایک منظم سدس بنایا گیا ہے اور اس کے وسطی نقطہ سے اس کی سطح پر ون عمود کھینچا گیا ہے جس کا طول ۹.۶ سنتی میٹر ہے ، ضلع ا ب کی تنصیف لا پر کی گئی ہے ،

اگر ا ب = ۴.۵ سم تو ن ا ، و لا ، ن لا ، جم و لان جم و لان کی قیمتیں دریافت کرو اور ثابت کرو کہ ا ب ، ن لا

پر عمود ہے۔

مسئلہ اثباتی ۹ [اقلیدس م "ش ۱۰]

اگر دو متقاطع خطوط مستقیم دو اور متقاطع خطوط کے بالترتیب متوازی ہوں اور دوسرا زوج پہلے زوج کی سطح مستوی میں واقع نہ ہو تو ثابت کر دو کہ پہلے زوج کا درمیانی زاویہ دوسرے زوج کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے۔

فرض کر دو کہ خطوط ا ب اور

ب ج بالترتیب خطوط د ع

اور ع ف کے متوازی ہیں

اور دوسرا زوج پہلے زوج

کی سطح میں واقع نہیں ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ

ا ب ج = د ع ف

ب ا کو ع د کے اور ب ج کو ع ف کے مساوی بناؤ۔ ا د

ب ع، ج ف، ا ج، د ف کو ملاؤ۔

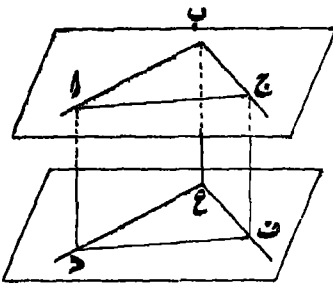
ثبوت۔ چونکہ ب ا، ع د کے مساوی اور متوازی ہے

∴ ا د، ب ع کے مساوی اور متوازی ہے

اسی طرح سے ج ف، ب ع کے مساوی اور متوازی ہے

اب چونکہ ا د اور ج ف دونوں ب ع کے مساوی

اور متوازی ہیں۔ اس لئے یہ دونوں (ا د اور ج ف) ایک

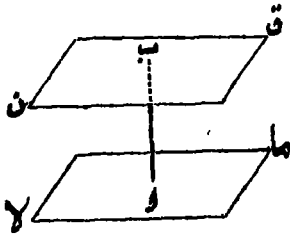


دوسرے کے مساوی اور متوازی ہیں۔ [مسئلہ ۸]
لہذا اب مساوی اور متوازی ہوا د ف کے،
تب مثلثات ا ب ج اور د ع ف میں
چونکہ ا ب، ب ج، ا ج بالترتیب مساوی ہیں د ع، ع ف،
د ف کے،

∴ ا ب ج = د ع ف
اور یہی ثابت کرنا تھا۔

مسئلہ اثباتی ۱۰ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۴]

جن مستوی سطحوں پر ایک ہی خط مستقیم عمود ہو وہ ایک
دوسرے کے متوازی ہوتی ہیں۔



فرض کر دو کہ خط
مستقیم ا ب سطوح
مستویہ لاما، ن ق
پر عمود ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود
ہے کہ مستوی سطحیں

لاما اور ن ق

ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

ثبوت - چونکہ ا ب سطح مستوی لاما پر عمود ہے اسلئے
یہ اس خط پر بھی عمود ہوگا جو ا کو سطح لاما پر کے کسی نقطہ

سے ملاتا ہے۔

اسی طرح سے خط AB اُس خط پر بھی عمود ہوگا جو نقطہ B کو سطح CD پر کے کسی نقطہ سے ملاتا ہے
لہذا اگر سطوح AB اور CD میں کوئی نقطہ مشترک ہو تو ہم اس طرح اس نقطہ کو A اور B کے ساتھ ملانے سے خط مستقیم AB پر ایک ہی نقطہ M سے دو عمود AM اور BM کھینچ سکتے ہیں جو صریحاً ناممکن ہے، پس ثابت ہوا کہ سطوح AB اور CD میں کوئی نقطہ مشترک نہیں ہو سکتا یعنی یہ سطحیں ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

مشقیں

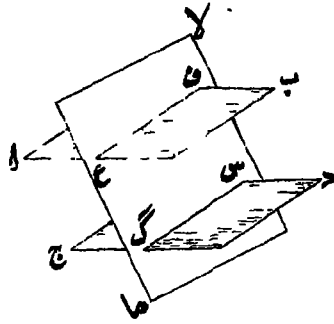
۱۔ AB اور CD دونوں ایک سطح مستوی پر عماد ہیں اور اس کو B اور D پر قطع کرتے ہیں، اگر AB اور CD کے طول برابر ہوں اور یہ دونوں سطح مستوی کے ایک ہی جانب واقع ہوں تو ثابت کرو کہ AB اور CD ایک سطحیں ہیں۔

۲۔ گزشتہ مشق کو استعمال کرنے سے ایک ایسے نقطہ کا طریق دریافت کرو جس کا فاصلہ ایک مفروضہ سطح مستوی سے ہمیشہ وہی رہے۔
۳۔ ایک ایسے نقطہ کا طریق دریافت کرو جس کا فاصلہ دو نقاط مفروضہ سے ہمیشہ وہی رہے۔

مسئلہ اثباتی ۱۱ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۶]

ایک مستوی سطح دو متوازی مستوی سطحوں کو قطع کرتی ہے،

ثابت کرو کہ خطوط تقاطع ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔



فرض کرو کہ سطح مستوی لاما سطوح متوازی اب اور ج د
کو خطوط مستقیم ع ف اور گ س پر قطع کرتی ہے۔
یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ع ف اور گ س ایک دوسرے
کے متوازی ہیں۔

ثبوت۔ خطوط ع ف اور گ س ایک دوسرے سے
مل نہیں سکتے کیونکہ یہ بالترتیب مستوی سطوح اب اور ج د
میں واقع ہیں اور ان سطحوں میں کوئی نقطہ مشترک نہیں۔
نیز ع ف اور گ س دونوں ایک مستوی سطح لاما
میں واقع ہیں۔

اس لئے ع ف اور گ س متوازی ہیں۔

مشقیں

۱۔ ایک نقطہ مفروضہ میں سے صرف ایک مستوی سطح کھینچ سکتی ہے جو

ایک مفروضہ مستوی سطح کے متوازی ہو۔

۲۔ اگر ایک خط مستقیم دو متوازی مستویات میں سے کسی ایک پر عماد ہو تو یہ دوسری سطح پر بھی عماد ہوگا۔

۳۔ ثابت کرو کہ جو مستوی سطحیں ایک مفروضہ مستوی سطح کے متوازی ہوں وہ ایک دوسرے کے متوازی ہوتی ہیں۔

۴۔ ثابت کرو کہ متوازی مستقیم خطوں کے جو حصے متوازی سطحوں کے درمیان واقع ہوتے ہیں وہ ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

۵۔ متوازی سطحوں کے دو زوج معلوم ہیں، بتاؤ کہ ان کے خطوط تقاطع کتنے ہونگے؟ ثابت کرو کہ یہ سب خط ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

مسئلہ اثباتی ۱۲ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۵]

اگر دو متقاطع مستقیم خط متوازی ہوں بالترتیب دو اور متقاطع

مستقیم خطوں کے ٹیگن

ان کی سطح میں واقع

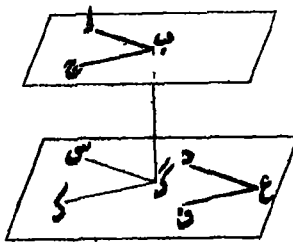
نہ ہوں تو پہلے زوج

کی سطح مستوی دوسرے

زوج کی سطح مستوی

کے متوازی ہوگی۔

فرض کرو کہ خطوط



مستقیم ا ب ، ب ج متوازی ہیں بالترتیب د ع ، ع ف کے جو ا ب ، ب ج کی سطح مستوی میں واقع نہیں ہیں۔ یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ا ب ، ب ج کی سطح مستوی د ع ، ع ف کی سطح مستوی کے متوازی ہے۔ نقطہ ب سے د ع ، ع ف کی سطح مستوی پر عمود ب گ بنکالو جو اس سے گ پر ملے۔

گ س ، گ ک بالترتیب ع د اور ع ف کے متوازی لکھیں۔

ثبوت :- چونکہ ب گ عمود ہے د ع ، ع ف کی سطح مستوی پر

∴ زاوے ب گ س اور ب گ ک قائمے ہیں۔
اب مفروضات کی رو سے ب ا متوازی ہے ع د کے اور عمل کی رو سے گ س متوازی ہے ع د کے۔

∴ ب ا متوازی ہے گ س کے [مسئلہ ۸]
اور چونکہ ب گ س قائمہ ہے
∴ ا ب گ قائمہ ہے
اسی طرح سے ج ب گ قائمہ ہے

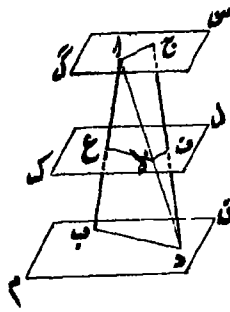
∴ ب گ عمود ہے ا ب ، ب ج کی سطح مستوی پر اور عمل کی رو سے ب گ عمود ہے ع د ، ع ف کی سطح مستوی پر۔

اسلئے ا ب ، ب ج کی سطح مستوی متوازی ہے

ع د، ع ف کی سطح مستوی کے، اور یہی ثابت کرنا تھا۔ [مسئلہ ۱۰]

مسئلہ اثباتی ۱۳ [اقلیدس م اشس]

اگر متوازی سطوح مستویہ مستقیم خطوں کو قطع کریں تو وہ سب خطوط کو ایک ہی نسبت سے اقطع کرینگے



فرض کرو کہ تین متوازی سطوح مستویہ گ س، ک ل، م ن خطوط مستقیم ا ب، ج د کو نقاط ا، ع، ب اور ج، ف، د پر اقطع کرتی ہیں۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ نسبت ا ع : ب = ج ف : ف د،

ا ج، ب د، ا د کو ملاؤ اور فرض کرو کہ خط ا د

سطح مستوی ک ل سے نقطہ لا پر ملتا ہے، ع لا، لا ف کو ملاؤ۔

ثبوت۔ چونکہ دو متوازی سطوح مستویہ ک ل، م ن کو

سطح مستوی ا ب د قطع کرتی ہے، اس لئے تقاطع کے

خطوط ع لا، ب د ایک دوسرے کے متوازی ہیں [مسئلہ ۱۱]

نیز چونکہ دو متوازی سطوح مستویہ گ، س، ک ل کو سطح مستوی
داج قطع کرتی ہے اسلئے تقاطع کے خطوط لاف، اج
باہم متوازی ہیں۔

اب چونکہ ع لا متوازی ہے ب د کے جو ایک ضلع
ہے مثلث ا ب د کا

$$\therefore \text{اع : ع ب} = \text{الا : لا د}$$

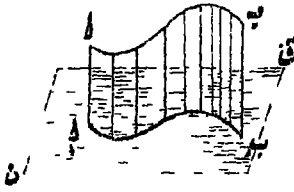
نیز چونکہ لاف متوازی ہے اج کے جو مثلث داج کا
ایک ضلع ہے

$$\therefore \text{الا : لا د} = \text{ج ف : ف د}$$

$$\text{اس لئے اع : ع ب} = \text{ج ف : ف د}$$

۱۔ دو متوازی سطوح مستوی دو متقاطع سطوح مستوی کو قطع کرتی
ہیں، اس طرح سے پہلے زوج کی ہر ایک سطح اور دوسرے زوج کی
دونوں سطحوں کے تقاطع سے خطوط مستقیم کے دو زوج حاصل
ہوتے ہیں، ثابت کرو کہ پہلے زوج کے خطوط کا درمیانی زاویہ دوسرے
زوج کے خطوط کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے، اس کی مستثنیٰ
صورت بیان کرو۔

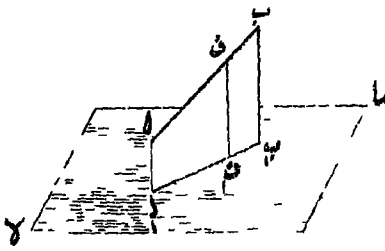
۲۔ بتاؤ کہ کسی مفروضہ خط مستقیم پر ایک ایسے نقطہ کا تعین کس طرح ہو سکتا
ہے جس کے فاصلے دو ثابت نقطوں سے مساوی ہوں، کیس صورت میں ناممکن ہوگا
تقریبت۔ اگر کسی خط مفروضہ کے ہر ایک نقطہ سے ایک
سطح مستوی پر عمود نکالے جائیں تو ان عمودوں کے پایوں
کا جو طریق ہو اس کو خط مذکور کا ظل سطح مستوی پر کہتے



ہیں۔
ساتھ کی شکل میں خط 'ا ب'
کاغل سطح 'ن' ق پر 'ا ب'
ہے۔

مسئلہ اثباتی ۱۴

کسی سطح مستوی پر ایک خط مستقیم کا نقل بھی خط مستقیم ہوتا ہے
فرض کرو کہ مفروضہ خط



مستقیم 'ا ب' ہے اور سطح
مستوی لایا ہے۔

نیز فرض کرو کہ 'ا ب'
پر کے کسی نقطہ 'ن' سے

سطح مستوی لایا پر عمود

'ن' 'ن' کھینچا گیا ہے جو اس سے 'ن' پر ملتا ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ 'ن' کا طریق خط مستقیم ہے

'ا' اور 'ب' سے سطح مستوی لایا پر عمود 'ا ب' 'ب' 'ا' کھینچو

ثبوت۔ خطوط 'ا ب' 'ب' 'ا' 'ن' 'ب' ایک

دوسرے کے متوازی ہیں کیونکہ یہ سب سطح مستوی لایا

پر عمود ہیں۔ [مسئلہ کا عکس]

نیز یہ سب متوازی خط ایک ہی سطح مستوی میں واقع

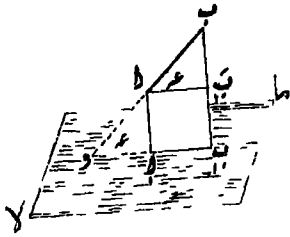
ہیں کیونکہ یہ سب خط مستقیم 'ا ب' کو قطع کرتے ہیں۔

اس لئے نقطہ ن سطوح مستویہ ا ب اور لا ما کے خط تقاطع پر واقع ہے۔

یعنی ن خط مستقیم ا ب پر واقع ہے
لیکن چونکہ ن ا ب کے ظل پر کا کوئی نقطہ ہے
اب کا ظل خط مستقیم ا ب ہے
فرع ۱۔ ایک خط مستقیم ا ب اور ایک سطح مستوی لا ما
کے درمیانی زاویہ کا ناپ وہ زاویہ ہے جو ا ب
اور سطح مستوی پر اس کے ظل کے درمیان بنتا ہے کیونکہ ایک
خط مستقیم اور اس کا ظل ہم سطح ہوتے ہیں۔

مثلاً اگر ا ب اور ا ب
(ممدودہ بشرط ضرورت) ایک

دوسرے سے و پر ہیں تو
ا ب اور سطح مستوی لا ما کے
درمیانی زاویہ کا ناپ
ح ب و ب ہوگا۔



فرع ۲۔ سطح مستوی لا ما پر جو ا ب کا ظل ہے اس کے
طول کو ا ب اور سطح لا ما کے درمیانی زاویہ اور ا ب
کی رقوم میں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ خط مستقیم ا ب سطح مستوی لا ما کے ساتھ
زاویہ عہ بنتا ہے (ملاحظہ ہو شکل بالا)

ا ب کو ا ب کے متوازی کھینچو اور فرض کرو کہ یہ

ب ب کو ب پر قطع کرتا ہے۔

تب $\angle ب ا ب = \angle ب و ب = ع$

اب مثلث قائم الزاویہ ب ا ب سے $\frac{ا ب}{ب} = \frac{ا ب}{ب} = \text{جم ع}$

لہذا $\angle ب = \angle ب = ا ب = \text{جم ع}$

نوٹ - جیسے ع صفر سے ۹۰ تک بڑھتا ہے جم ع کی قیمت کم ہوتی جاتی ہے، اس سے ظاہر ہے کہ جیسے ا ب کا میلان سطح مستوی کے ساتھ بڑھتا جائے گا اس کا ظل ا ب کم ہوتا جائیگا۔

مشقیں

- ۱- اگر ایک خط مستقیم ایک سطح مستوی کے متوازی ہو تو ثابت کرو کہ یہ سطح مستوی پر اپنے ظل کے بھی متوازی ہوگا۔
- ۲- ا ب کے طول کا مقابلہ سطح لا ما پر اس کے ظل کے ساتھ کرو جبکہ ا ب

(۱) متوازی ہو سطح مستوی کے

(۲) عمود ہو سطح مستوی پر

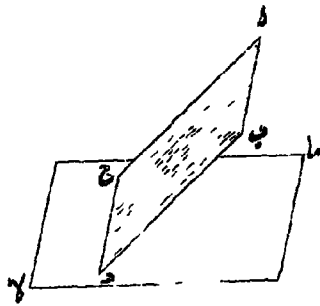
(۳) سطح مستوی کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بنائے

- ۴- ثابت کرو کہ اگر کسی بیرونی نقطہ سے سطح مستوی تک مساوی خطوط اُل کھینچے جائیں تو ان سب کے ظل بھی مساوی ہوتے ہیں۔
- ۵- ثابت کرو کہ سطح مستوی پر متوازی خطوں کے ظل بھی متوازی ہوتے ہیں، کیا اس کی کوئی مستثنیٰ صورت ہے؟

۵۔ ایک سطح مستوی پر دو متوازی خطوط مستوی AB ، CD کے
 ظل بالترتیب AB ، CD ہیں ثابت کرو کہ
 $AB : CD = AB' : CD'$

مسئلہ اثباتی ۱۵

ایک خط مستقیم ایک مستوی کے باہر واقع ہے اور سطح میں
 ایک خط مستقیم کے متوازی ہے، ثابت کرو کہ بیرونی خط سطح
 مستوی کے متوازی ہے۔



فرض کرو کہ AB متوازی ہے CD کے، جو سطح مستوی AB کے
 واقع ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ AB سطح مستوی AB کے متوازی ہے
 ثبوت۔ فرض کرو کہ متوازی خطوط AB اور CD کی
 سطح مستوی AB ہے، یعنی مستوی سطوح AB ، CD کا خط
 تقاطع CD ہے۔

تب اگر خط AB جو سطح مستوی AB پر واقع ہے سطح مستوی

لاہا سے کہیں ملے تو لازماً یہ (ا ب) خط مستقیم ج د کے کسی نقطہ پر ملے گا۔

لیکن حسب مفروض ا ب، ج د سے کہیں نہیں مل سکتا۔
∴ خط ا ب سطح مستوی لاہا سے بھی کہیں نہیں مل سکتا یا بالفاظ دیگر یہ اس کے متوازی ہے۔

برعکس اس کے اگر ایک خط مستقیم ایک سطح مستوی کے متوازی ہو اور اس خط میں سے گزرنیوالی ایک اور مستوی سطح اول الذکر مستوی کو قطع کرے تو ان سطحوں کا خط تقاطع مفروضہ خط مستقیم کے متوازی ہوگا۔

شکل بالا میں فرض کرو کہ خط ا ب سطح مستوی لاہا کے متوازی ہے اور ا ب میں سے گزرنیوالی سطح مستوی ا د کا خط تقاطع سطح مستوی لاہا کے ساتھ خط مستقیم ج د ہے

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ج د، ا ب کے متوازی ہے
ثبوت۔ چونکہ خط ا ب مستوی لاہا کے متوازی ہے اسلئے یہ خط ج د سے جو اس سطح مستوی پر واقع ہے کبھی نہیں مل سکتا۔

علاوہ ازیں ا ب اور ج د دونوں سطح مستوی ا د میں واقع ہیں۔

∴ ا ب متوازی ہے ج د کے

فرع۔ دو موج خط معلوم ہیں، ثابت کرو کہ کسی ایک خط میں سے ایک ایسی سطح مستوی کھینچی جاسکتی ہے جو دوسرے خط

کے متوازی ہو

فرض کرو کہ ا ب

اور ج د دو موج خط

ہیں یعنی یہ ایسے خط

ہیں جو ایک ہی سطح مستوی

میں واقع نہیں ہوتے

ا ب کے کسی نقطہ و میں سے ج و د کے متوازی کھینچو
تب ا ب اور ج د دونوں ل کر ایک سطح مستوی لا ما کی تعیین
کرتے ہیں اور خط ج د اس سطح کے متوازی ہے کیونکہ یہ ج د کے متوازی
ہے جو اس سطح میں واقع ہے۔

تشریف۔ دو موج خط معلوم ہیں، ان میں سے ایک پر کسی
نقطہ سے دوسرے خط کے متوازی ایک تیسرا خط کھینچا گیا
ہے، ان متقاطع خطوط (پہلے اور تیسرے) کے درمیان جو
زاویہ بنتا ہے وہ موج خطوں کے درمیان زاویہ کا ناپ
ہوتا ہے۔

مثلاً شکل بالا میں موج خطوط ا ب اور ج د کے درمیان
زاویہ کا ناپ وہ زاویہ ہے جو ا ب، ج د سے بنتا ہے جہاں
ج د خط ا ب کے کسی نقطہ و سے ج د کے متوازی کھینچا گیا ہے۔

مشقیں

۱۔ اگر ایک خط مستقیم ا ب کسی سطح مستوی لا ما کے متوازی

ہو تو

(۱) ہر خط مستقیم جو اب کے متوازی ہوگا وہ سطح مستوی کے بھی متوازی ہوگا۔

(۲) ہر خط جو سطح مستوی کے متوازی ہوگا وہ اب کے بھی متوازی ہوگا۔

ان دو امور میں سے کوئی سا صحیح ہے اور کوئی سا غلط ؟

۲۔ ایک خط مستقیم اب نقطہ ا کے گرد گردش کرتا ہے اور ہمیشہ سطح مستوی لاہا کے متوازی رہتا ہے ، بتاؤ کہ اب کس سطح کی تشکیل کرتا ہے ؟

۳۔ دو متقاطع مستوی سطحیں بالترتیب دو متوازی خطوط اب ج د میں سے گزرتی ہیں ، ثابت کرو کہ متقاطع سطوح کا خط تقاطع اب ج د کے متوازی ہے۔

۴۔ ایک خط مستقیم دو متقاطع مستوی سطحوں میں سے ہر ایک کے متوازی ہے ، ثابت کرو کہ یہ ان سطحوں کے خط تقاطع کے بھی متوازی ہے۔

۵۔ ثابت کرو کہ ایک نقطہ مفروضہ ن میں سے ایک ایسی سطح مستوی کھینچی جاسکتی ہے جو ہر دو معوج خطوط اب ج د کے متوازی ہو۔

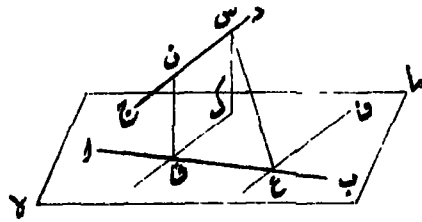
۶۔ ثابت کرو کہ دو معوج خطوط میں سے دو ایسی مستوی سطحیں گزر سکتی ہیں جو ایک دوسرے کے متوازی ہوں۔

مسئلہ اثباتی ۱۶

اگر دو خطوط مستقیم نہ ایک دوسرے کو قطع کریں اور نہ متوازی

ہوں تو

- (۱) ایک خط مستقیم ایسا ہو سکتا ہے جو ان دونوں پر عمود ہو
 (۲) اور یہ مشترک عمود ان دونوں خطوں کے درمیان
 چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے۔



فرض کرو کہ 'ا ب' اور 'ج د' دو مفروضہ کا نئے خط میں
 (۱) یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ ایک خط مستقیم ایسا ہوگا
 جو 'ا ب' اور 'ج د' دونوں پر عمود ہو۔
 'ا ب' کے کسی نقطہ 'ع' میں سے 'ع ف'، 'ج د' کے متوازی
 کھینچو اور فرض کرو کہ 'ع ف' اور 'ا ب' کی سطح مستوی لاہا
 ہے، نیز فرض کرو کہ 'ج د' کا نفل سطح لاہا پر 'ق' ک
 ہے جو 'ا ب' کو 'ق' پر قطع کرتا ہے اور 'ن'، 'ج د' پر کا
 وہ نقطہ ہے جس کا نفل 'ق' ہے۔

تب 'ن ق' خطوط 'ا ب' اور 'ج د' دونوں پر عمود ہوگا۔
 ثبوت۔ چونکہ 'ج د'، 'ع ف' کے متوازی ہے اس لئے
 یہ سطح مستوی لاہا کے بھی متوازی ہے۔

لہذا ج د اپنے ظل ق ک کے بھی متوازی ہے [مسئلہ ۱۵]
 نیز چونکہ ن ق سطح مستوی لاہا پر عمود ہے
 اسلئے زاویے ن ق د ب اور ن ق ک ق قائمے ہیں
 پس زاویہ ق ن د ایک قائمہ ہے۔

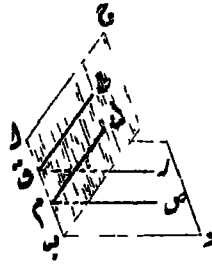
پس ن ق عمود ہے اسب اور ج د دونوں پر
 (۲) یہ ثابت کرنا ہے کہ ن ق خطوط ج د اور اب کے
 درمیان چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ ہے۔

ج د کے کسی نقطہ میں سے کوئی خط مستقیم س ع ایسا کھینچو
 جو اب کو غ پر قطع کرے اور س سے سطح مستوی لاہا پر عمود
 س ک نکالو

تب عمود س ک لازماً خط ماثل س ع سے چھوٹا ہوگا [مسئلہ ۱۶]
 ن ق بھی جو اس کے مساوی اور متوازی ہے س ع سے
 چھوٹا ہوگا۔

تعریفات - (۱) جب دو مستوی سطحیں ایک دوسرے کو
 قطع کریں تو خط تقاطع پر ان کے درمیان دو سطحی زاویہ بنتا ہے
 (۲) اور اس کا ناپ ان دو خطوط مستقیم کا درمیان فی زاویہ
 ہوتا ہے جن میں سے ہر ایک خط تقاطع کے کسی نقطہ سے
 ہر سطح میں کھینچا گیا ہو اور ہر ایک خط تقاطع پر عمود ہو۔

مثلاً دو متقاطع مستوی سطحوں ا د اور ب ج کا خط تقاطع
 اب ہے اور اب پر کے کسی نقطہ ق سے سطح مستوی ا د
 میں ق ا پر عمود کھینچا گیا ہے اور ق ن سطح مستوی



ب ج میں اب پر

عمود کھینچا گیا ہے

پس ان دو مستوی

سطحوں کے درمیان

جو دوسطی زاویہ ہے

اس کا ناپ ہے

\angle ن ق ر ہے

نوٹ۔ (۱) اس تعریف میں ہم نے یہ تسلیم کر لیا ہے کہ نقطہ ق،
اب پر خواہ کہیں لیا جائے زاویہ ن ق ر کی مقدار میں فرق
نہیں آتا اس کی تصدیق مسئلہ ۹ کی رو سے
فورا ہو سکتی ہے۔

خط تقاطع اب پر کے کسی اور نقطہ م سے دونوں سطحوں میں
اب پر عمود م ل، م ص کھینچو۔

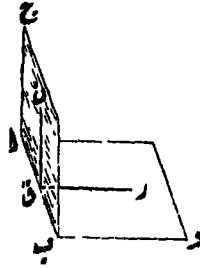
تب صریحاً ل م، م ص بالترتیب متوازی ہیں ن ق، ق ر کے
: \angle ل م ص = \angle ن ق ر

(۲) چونکہ اب، ن ق اور ق ر دونوں پر عمود ہے اسلئے
یہ ن ق اور ق ر کی سطح مستوی پر بھی عمود ہوگا۔

پس دو مفروضہ مستوی سطحوں ب ج، ا د کے دوسطی زاوے کی تعیین ان دو
سطحوں کو کسی ایسی مستوی سطح سے کاٹنے سے ہو سکتی ہے جو
ان دونوں سطحوں کے خط تقاطع اب پر عمود ہو۔

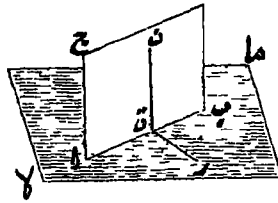
۴۴۔ اگر دو مستوی سطحوں کا دوسطی زاویہ ایک قائمہ کے

برابر ہو تو یہ سطحیں ایک دوسرے پر عمود کہلاتی ہیں



مسئلہ اثباتی ۱۱ [اقلیدس م ۱۱ ش ۱۸]

اگر ایک خط مستقیم ایک سطح مستوی پر عمود ہو تو ہر ایک مستوی سطح جو اس عمود میں سے گزرے مفروضہ سطح مستوی پر عمود ہوگی۔



فرض کرو کہ خط مستقیم $ق$ سطح مستوی $لا$ پر عمود ہے اور $ب$ ج
ایک ایسی سطح مستوی ہے جو عمود $ق$ میں سے گزرتی ہے۔
یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ سطح مستوی $ب$ ج سطح مستوی $لا$ پر عمود ہے
سطوح مفروضہ $لا$ اور $ب$ ج کے خط تقاطع

پر کوئی نقطہ $ق$ اور $ق$ سے سطح لایا میں $ا ب$ پر عمود $ق$ پر کھینچو۔

ثبوت۔ چونکہ $ن ق$ سطح لایا پر عمود ہے اس لئے یہ خطوط $ق ب$ ، $ق ر$ دونوں پر عمود ہے۔

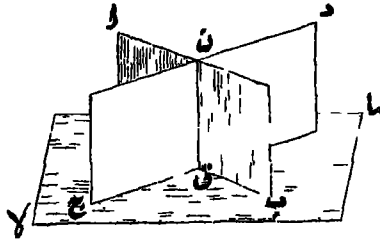
لہذا زاویہ $ن ق ر$ ایک قائمہ ہے، نیز چونکہ دو سطحی زاویہ کا ناپ بھی یہی زاویہ ہے ————— کیونکہ خطوط $ن ق$ ، $ق ر$ دونوں خطوط تقاطع $ا ب$ پر عمود ہیں

۱۔ سطح مستوی $ب ج$ عمود ہے سطح مستوی لایا پر۔
 فروغ۔ برعکس اسکے عمل بالا سے ہی یہ ثابت کیا جاسکتا ہے کہ
 (۱) اگر دو مستوی سطحیں $ب ج$ ، لایا ایک دوسرے پر عمود ہوں اور کوئی خط مستقیم $ن ق$ سطح مستوی $ب ج$ میں خط تقاطع $ا ب$ پر عموداً کھینچا جائے تو یہ خط سطح مستوی لایا پر بھی عمود ہوگا۔

(۲) اگر سطح مستوی $ب ج$ سطح مستوی لایا پر عمود ہو اور پہلی سطح کے کسی نقطہ $ن$ سے دوسری سطح پر عمود $ن ق$ کھینچا جائے تو $ن ق$ سطح مستوی $ب ج$ میں واقع ہوگا۔

مسئلہ اثباتی ۱۸ [اقلیدس م ۱۱ اش ۱۹]

اگر دو متقاطع مستوی سطحوں میں سے ہر ایک کسی تیسری سطح مستوی پر عمود ہو تو پہلی دو سطحوں کا خط تقاطع تیسری سطح پر عمود ہوگا۔



فرض کرو کہ سطوح
مستوی ا ب
اور ج د کا خط
تقاطع ن ق ہی
اور یہ دونوں سطحیں
سطح لاما پر
عمود ہیں۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ خط ن ق سطح مستوی لاما
پر عمود ہے۔

ثبوت۔ اگر سطوح ا ب اور ج د کے کسی مشترک نقطہ ن
سے سطح لاما پر عمود نکالا جائے تو یہ عمود سطوح ا ب اور ج د
میں سے ہر ایک میں واقع ہوگا کیونکہ یہ دونوں سطحیں ا ب
اور ج د سطح لاما پر عمود ہیں [مسئلہ ۱۷ فرع ۲]
لہذا یہ عمود خط تقاطع ن ق پر منطبق ہوگا یا بالفاظ دیگر
ن ق سطح لاما پر عمود ہے۔

مشقیں

- ۱۔ کسی مفروضہ خط مستقیم میں سے ایک ایسی سطح مستوی کھینچی جاسکتی ہے
جو ایک مفروضہ سطح مستوی پر عمود ہو
- ۲۔ ثابت کرو کہ اگر ایک خط مستقیم دو متوازی سطوح مستوی کو قطع
کرے تو یہ ان سطحوں کے ساتھ مساوی زاوے بناتا ہے۔

۳۔ اگر ایک سطح مستوی دو اور متوازی سطوح مستویہ کو قطع کرے
تو متناظر دوسطی زاوئے مساوی ہوتے ہیں۔

۴۔ ایک کمرہ کا فرش Δ ب ج د ہے اور اس کی چھت
 Δ ب ج د،

اگر کمرہ کا طول Δ ب = ۵۰ میٹر، عرض Δ د = ۶۰ میٹر
اور ارتفاع = ۵۰ میٹر تو

(۱) سطح Δ ب ج د اور فرش

(۲) سطح Δ ب ج د اور فرش

کے درمیان جو دوسطی زاوئے بنتے ہیں ان کی جیب اتمام معلوم کرو۔

۵۔ ایک افقی مربع Δ ب ج د کے مرکز کے عین اوپر اتمامابی

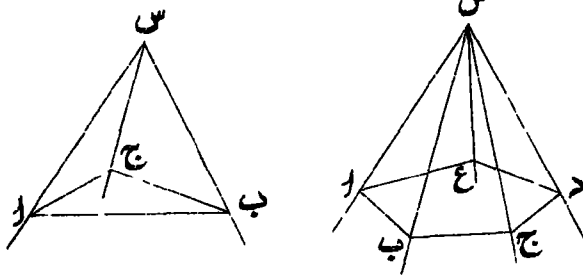
سمت میں ایک نقطہ ن، ۲ فٹ کے فاصلہ پر واقع ہے، اگر Δ ب کا

طول ۱ فٹ ۲ انچ ہو تو مربع کی سطح اور سطح ن Δ ب کے درمیان

جو دوسطی زاوئے بنتا ہے اس کی جیب اتمام معلوم کرو۔

مجموعہ زاوے

اگر تین یا زیادہ مستوی سطحوں میں سے ہر ایک بالترتیب اپنے مابعدگی سطح کو اس طرح قطع کرے کہ ان سب کے خطوط تقاطع ایک دوسرے سے ایک ہی نقطہ پر ملیں تو ان سطحوں سے جو زاویہ بنتا ہے اس کو مجموعہ زاویہ کہتے ہیں، ان سب خطوط تقاطع کے مشترک نقطہ کو راس کہتے ہیں، متصل سطحوں کے خطوط تقاطع مجموعہ زاوے کے کنارے کہلاتے ہیں، متصل سطحوں کے درمیان جو زاوے بنتے ہیں ان کو دو سطحی زاویوں سے موسوم کرتے ہیں اور متصل کناروں کے درمیان جو مستوی زاوے بنتے ہیں ان کو رخوں کے زاوے یا طرفی زاوے کہتے ہیں۔

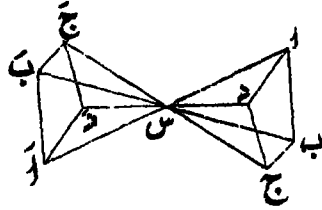


مثلاً اشکال بالا میں سطوح مستوی 'ا س ب'، 'ب س ج'، جو ایک دوسرے کو علی التواتر متراکز کناروں 'س ب'، 'س ج'، ... پر کاٹی ہیں راس 'س' پر مجموعہ زاویہ بنتی ہیں۔ مجموعہ زاویہ کو ('س'، 'ا ب ج د ع ...') سے با محض حرف 'س' سے تعبیر کرتے ہیں

۲- تین مشرکز (یا ہم نقطہ) سطوح مستوی سے جو مجسم زاویہ بنتا ہے اس کو سہ سطحی زاویہ کہتے ہیں اور تین سے زیادہ مستوی سطحوں سے جو زاویہ بنتا ہے اس کو کثیر سطحی زاویہ کہتے ہیں اس سہ سطحی زاویہ کے تین طرفی زاویوں اور تین دوسطی زاویوں کو مجسم زاویہ کے چھ حصے کہتے ہیں۔

اگر دو مجسم زاویے ایک دوسرے پر عین منطبق ہو سکیں یعنی ایک زاویہ دوسرے پر ٹھیک آجائے تو یہ زاویے ایک دوسرے کے ہر طرح سے برابر ہونگے، اس صورت میں ایک مجسم زاویہ کے طرفی زاویے الگ الگ دوسرے مجسم زاویہ کے طرفی زاویوں کے مساوی ہونگے اور ایک مجسم زاویہ کے سب دوسطی زاویے الگ الگ دوسرے مجسم زاویہ کے دوسطی زاویوں کے برابر ہونگے بشرطیکہ مجسم زاویوں کے ان حصوں کو دونوں صورتوں میں ایک ہی ترتیب اور سمت میں لیا جائے۔

نوٹ۔ گزشتہ تعریف میں مجسم زاویوں کے حصوں کو ایک ہی ترتیب میں لینا چاہیئے، اس شرط کی ضرورت اس طرح واضح ہوتی ہے۔ ایک مجسم زاویہ کے کناروں کو اس میں سے دوسری جانب خارج کرو، اس طرح سے جو مجسم زاویہ حاصل ہوتا ہے، اس کا مقابلہ پہلے مجسم زاویہ سے کرو۔

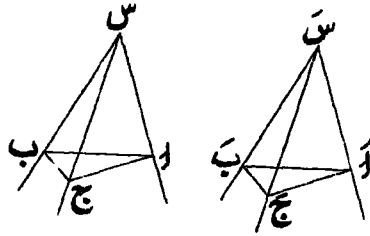


یہاں مجسم زدایا (س' ا ب ج د) اور (س' ا ب ج د) کے حصوں کو اگر اسی ترتیب سے لیا جائے جو حروف سے ظاہر ہے تو ایک زاویہ کے سبب طرفی زاوے اور وسطی زاوے الگ الگ دوسرے زاویہ کے سبب طرفی زاویوں اور وسطی زاویوں کے مساوی ہیں لیکن اگر ایک شخص ان دونوں زاویوں کے اندر سے رأس کی جانب دیکھے تو ایک صورت میں تو یہ ترتیب سمت ساعت کے موافق معلوم ہوگی مگر دوسری صورت میں سمت ساعت کے مخالف دکھائی دیگی۔

پس اگرچہ ان دونوں صورتوں میں مجسم زاویوں کے سبب اجزا بالترتیب ایک دوسرے کے مساوی ہیں لیکن باوجود اس کے یہ زاوے ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہو سکتے اس لئے ان کو ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی نہیں کہا جاسکتا۔ وہ مجسم زاوے جو ایک دوسرے سے حسب تشریح بالا تعلق رکھتے ہیں کمشاکل زاوے کہلاتے ہیں۔

نوٹ ۲۔ اگر دو وسطی زاویوں (س' ا ب ج) اور

(س، ا، ب ج) میں ایک کے تین طرفی زاوے ا س ب،
ب س ج، ج س ا بالترتیب دوسرے زاوے کے طرفی
زاویوں ا س ب، ب س ج، ج س ا کے برابر
ہوں تو پہلے مجسم زاویہ کے دو سطحی زاوے دوسرے کے دو سطحی
زاویوں کے بالترتیب برابر ہونگے۔



س ا اور س ا کے طول باہم مساوی بناؤ
اور سطوح مستوی ا س ب اور ا س ج میں بالترتیب ا ب
اور ا ج، س ا پر عمود کھینچو۔
نیز سطوح مستوی ا س ب اور ا س ج میں بالترتیب
ا ب اور ا ج، س ا پر عمود کھینچو
تب \angle ب ا ج اور \angle ب ا ج متناظر دو سطحی زاویوں
کے ناپ ہیں۔

ب ج اور ب ج کو ملاؤ
ثبوت کا خاکہ

مثلثوں کے حسب ذیل زوج باہم مساوی ہیں۔

$$(۱) \triangle س ا ب = \triangle س ا ب$$

$$(۲) \triangle س ا ج = \triangle س ا ج$$

$$(۳) \triangle ب س ج = \triangle ب س ج$$

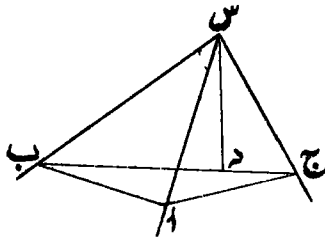
$$(۴) \triangle ب ا ج = \triangle ب ا ج$$

$$پس \triangle ب ا ج = \triangle ب ا ج$$

اسی طرح سے باقی کے دو سطحی زاویوں کو بھی برابر ثابت کیا جاسکتا ہے اور اگر مساوی زاوے ایک ہی ترتیب اور سمت میں واقع ہوں تو دونوں مجسم سہ سطحی زاوے ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہونگے۔

مسئلہ اثباتی ۱۹ [اقلیدس م ۱۱ ش ۲۰]

ایک سہ سطحی زاویہ میں دو طرفی زاویوں کا مجموعہ تیسرے زاوے سے



بڑا ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ

(س، ا، ب ج)

ایک سہ سطحی زاویہ ہے جس کے طرفی زاوے بالترتیب ا س ب، ب س ج، ج س ا ہیں۔

ان زاویوں میں فرض کرو کہ $\angle ب س ج$ سب سے بڑا ہے، یہ ثابت کرنا کافی ہوگا کہ زاویہ ا س ب، اور

ا س ج دونوں ملکر زاویہ ب س ج سے بڑے ہیں۔

سطح مستوی ب س ج میں زاویہ ب س د،

زاویہ ب س ا کے مساوی بناؤ اور س د کو س ا کے مساوی کاٹو

سطح مستوی ب س ج میں نقطہ د میں سے کوئی خط مستقیم کھینچو جو س ب، س ج سے بالترتیب ب اور ج پر ملے، اب، ا ج کو ملاؤ۔

ثبوت :- چونکہ مثلثات ب س ا اور ب س د میں ب س، س ا بالترتیب مساوی ہیں ب س، س د کے اور زاویہ ب س ا = ب س د

∴ ب ا = ب د

اب مثلث ب ا ج میں

حاصل جمع (ب ا + ا ج) بڑا ہے ب ج سے

یعنی بڑا ہے ب د + د ج سے

∴ ا ج بڑا ہے د ج سے

نیز مثلثات ا س ج اور د س ج میں

چونکہ ا س، س ج بالترتیب مساوی ہیں د س، س ج کے

لیکن ا ج بڑا ہے د ج سے

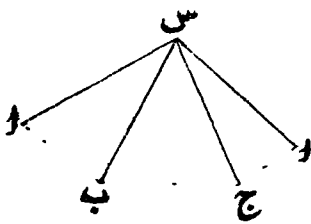
اس لئے زاویہ ا س ج بڑا ہے زاویہ د س ج سے،

∴ زاویا ا س ب اور ا س ج ملکر بڑے ہیں زاویا ب س د اور د س ج کے مجموعہ سے

یعنی بڑے ہیں زاویہ ب س ج سے

مسئلہ ۱۹ کا تجربی ثبوت

ایک محجم زاویہ بنانے کے لئے تین طرفی زاویوں \angle س ب،
 \angle ب س ج اور \angle س ج کو ایک سطح مستوی میں اس طرح کھینچو
 کہ سب سے بڑا زاویہ \angle ب س ج



باقی دو زاویوں کے درمیان واقع
 ہو، اب فرض کرو کہ یہ شکل غنڈ
 پر سے کاٹ لی گئی ہے۔ اور
 س \angle س \angle کو ایک دوسرے
 پر منطبق کرنے کی غرض سے اس کو

\angle ب س اور \angle س ج پر شکن دیکر تہ کیا گیا ہے۔

اب (۱) اگر \angle ب س \angle + \angle ج س \angle ملکر چھوٹے
 ہوں \angle ب س ج سے، تو س \angle اور س \angle ایک دوسرے
 پر نہیں لائے جاسکتے اور اس وجہ سے محجم زاویہ نہیں بن سکتا

(۲) اگر \angle ب س \angle + \angle ج س \angle ملکر برابر ہوں
 \angle ب س ج کے تو س \angle اور س \angle ایک دوسرے پر لائے تو جاسکتے
 ہیں لیکن ایسا کرنے سے س \angle اور س \angle دونوں سطح مستوی
 \angle ب س ج میں واقع ہونگے اور اس وجہ سے کوئی محجم زاویہ
 نہیں بن سکیگا۔

(۳) اگر \angle ب س \angle + \angle ج س \angle ملکر بڑے ہوں
 \angle ب س ج سے تو جب س \angle اور س \angle کو سطح مستوی \angle ب س ج

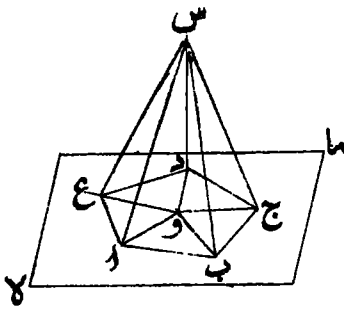
میں لایا جائے گا تو یہ ایک دوسرے سے تجاوز کر جائیں گے، لہذا ان کو سطح مستوی ب س ج کے باہر ایک دوسرے پر منطبق کیا جا سکتا ہے یعنی اس صورت میں ایک مجسم زاویہ بن سکتا ہے۔

مشقیں

- ۱۔ ثابت کرو کہ بالعموم تین مستوی سطحیں ایک نقطہ پر ملتی ہیں، اس کی تین متشقی صورتیں بتاؤ۔
- ۲۔ ثابت کرو کہ ایک معوج ذواربعتہ الاضلاع کے چار زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ 360° سے کم ہوتا ہے۔
- ۳۔ ایک نقطہ مفروضہ سے تین خط وا، وب، وج کھینچے گئے ہیں جو ایک ہی سطح مستوی میں واقع نہیں ہوتے اور اس مجسم زاویہ کے اندر جس کی تمسین خطوط مستقیم وا، وب، وج سے ہوتی ہے ایک اور خط مستقیم ولا کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ
 - (۱) زوایا لاوا، بولا، جولا کا مجموعہ زوایا لاوب، بوج، جولا کے نصف مجموعہ سے زیادہ ہے
 - (۲) زوایا لاولا اور جولا کا مجموعہ زوایا لاوب اور جوب کے مجموعہ سے کم ہے۔
 - (۳) زوایا لاولا، بولا اور جولا کا مجموعہ زوایا لاوب، بوج اور جولا کے مجموعہ سے کم ہے۔

مسئلہ اثباتی ۲۰ [قلیدس م الاش ۲۱]

ایک محدب مجسم زاویہ میں طرفی زاویوں کا مجموعہ چار قائموں سے کم ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ (س، ا، ب، ج د، ع)

ایک محدب مجسم زاویہ ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے

کہ طرفی زاویوں ا، س، ب،

ب، س، ج، ج، س، د،

د، س، ع، ع، س، ا کا حاصل

جمع چار قائموں سے کم ہے۔

ایک سطح مستوی لا ما کھینچو جو طرفی زوایا کی مستوی سطحوں

کو خطوط مستقیم ا، ب، ب، ج، ج، د، د، ع، ع، ا پر قطع کرے

اور اس طرح اسے ایک محدب کثیر الاضلاع ا، ب، ج، د، ع

بنائے۔

کثیر الاضلاع ا، ب، ج، د، ع کے اندر ایک نقطہ و لو اور

و، ا، و، ب، و، ج، و، د، و، ع کو ملاؤ۔

ثبوت۔ سطحی زاویہ ا میں حاصل جمع \angle س، ا، ب

$+ \angle$ س، ا، ع بڑا ہے \angle ع، ا، ب سے

یعنی بڑا ہے \angle و، ا، ع $+ \angle$ و، ا، ب سے [مسئلہ ۱۹]

اسی طرح سے ہر ایک راس زاویہ ب، ج، د، ع کے لئے۔

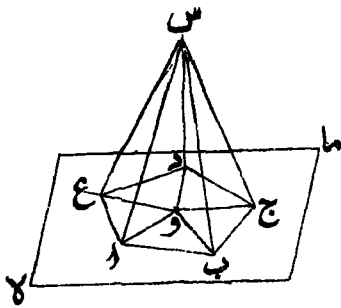
میں لایا جائے گا تو یہ ایک دوسرے سے تجاوز کر جائیں گے، لہذا ان کو سطح مستوی ب س ج کے باہر ایک دوسرے پر منطبق کیا جا سکتا ہے یعنی اس صورت میں ایک مجسم زاویہ بن سکتا ہے۔

مشقیں

- ۱۔ ثابت کرو کہ بالعموم تین مستوی سطحیں ایک نقطہ پر ملتی ہیں، اس کی تین مستثنیٰ صورتیں بتاؤ۔
- ۲۔ ثابت کرو کہ ایک موج ذوار بعثۃ الاضلاع کے چار زاویوں کا مجموعہ ہمیشہ 360° سے کم ہوتا ہے۔
- ۳۔ ایک نقطہ مفروضہ سے تین خط $وا$ ، $وب$ ، $وج$ کھینچ گئے ہیں جو ایک ہی سطح مستوی میں واقع نہیں ہوتے اور اس مجسم زاویہ کے اندر جس کی تیسرین خطوط مستقیم $وا$ ، $وب$ ، $وج$ سے ہوتی ہے ایک اور خط مستقیم $ولا$ کھینچا گیا ہے ثابت کرو کہ
 - (۱) زاویا $لاولا$ ، $بولا$ ، $جولا$ کا مجموعہ زاویا $اوب$ ، $بوج$ ، $جوا$ کے نصف مجموعہ سے زیادہ ہے
 - (۲) زاویا $لاولا$ اور $جولا$ کا مجموعہ زاویا $اوب$ اور $بوج$ کے مجموعہ سے کم ہے۔
 - (۳) زاویا $لاولا$ ، $بولا$ اور $جولا$ کا مجموعہ زاویا $اوب$ ، $بوج$ اور $جوا$ کے مجموعہ سے کم ہے۔

مسئلہ اثباتی ۲۰ [قلیدس م الاش ۲۱]

ایک محدب مجسم زاویہ میں طرفی زاویوں کا مجموعہ چار قائموں سے کم ہوتا ہے۔



فرض کرو کہ (س، ا، ب، ج، د، ع) ایک محدب مجسم زاویہ ہے۔

یہ ثابت کرنا مقصود ہے کہ طرفی زاویوں $\angle س، ا، ب$ ، $\angle ب، ج، د$ ، $\angle د، س، ع$ کا حاصل جمع چار قائموں سے کم ہے۔

ایک سطح مستوی لا کر کھینچو جو طرفی زوایا کی مستوی سطحوں کو خطوط مستقیم $\angle ا، ب، ج$ ، $\angle ج، د، ع$ ، $\angle ع، ا، ب$ پر قطع کرے اور اس طرح اسے ایک محدب کثیر الاضلاع $\angle ا، ب، ج، د، ع$ بنائے۔

کثیر الاضلاع $\angle ا، ب، ج، د، ع$ کے اندر ایک نقطہ ولو اور $\angle ا، د، ب$ ، $\angle ب، د، ج$ ، $\angle ج، د، ع$ کو ملاؤ۔

ثبوت۔ سطحی زاویہ $\angle ا$ میں حاصل جمع $\angle س، ا، ب$ + $\angle س، ا، ع$ بڑا ہے $\angle ا، ب، ج$ سے

یعنی بڑا ہے $\angle ا، ب، ج$ + $\angle ا، ج، د$ سے [مسئلہ ۱۹] اسی طرح سے ہر ایک راس زاویہ $\angle ب، ج، د$ ، $\angle د، س، ع$ کے لئے۔

لہذا جن مثلثوں کے راس نقطہ میں ہیں ان کے قاعدوں پر کے زاویوں کا مجموعہ بڑا ہے ان تمام مثلثوں کے قاعدوں پر کے زاویوں کے مجموعہ سے جس کے راس نقطہ پر ہیں اور چونکہ دونوں صورتوں میں مثلثوں کی تعداد ایک ہی ہے اس لئے دونوں صورتوں میں تمام زاویوں کے مجموعے بھی مساوی ہونگے اس سے معلوم ہوتا ہے کہ اس پر کے سب زاویوں کا مجموعہ و پر کے سب زاویوں کے مجموعہ سے کم ہے۔ لیکن و پر کے سب زاوے چار قائموں کے برابر ہیں اس لئے اس پر کے سب زاویوں کا مجموعہ چار قائموں سے کم ہے۔

(متفرق) مشقیں

۱۔ ایک مائل خط اور سطح مستوی کے نقطہ تقاطع میں سے اس سطح میں دو خط کھینچے گئے ہیں جن میں سے ایک تو خط مائل کا ظل ہے اور دوسرا کوئی اور خط، ثابت کرو کہ مائل اور اس کے ظل کا درمیانی زاویہ، مائل اور دوسرے خط کے درمیانی زاویہ سے چھوٹا ہوتا ہے۔

۲۔ بتاؤ کہ ایک سطح مائل میں اس کے کسی نقطہ میں سے ایسا خط کس طرح کھینچا جاسکتا ہے جو افقی سطح سے بڑے سے بڑا زاویہ بنائے۔

۳۔ ایک سطح مستوی میں ایک ثابت نقطہ و ہے اور اس کے باہر ایک اور ثابت نقطہ ن ہے، اگر نقطہ ن میں سے ان تمام

خطوں پر عمود نکالے جائیں جو نقطہ و سے سطح مستوی میں کھینچے جاسکتے ہیں تو ان عمودوں کے پایوں کا طریق دریافت کرو۔

۴۔ ایک نقطہ و سے دو متقاطع مستویات پر عماد ان، ا ق کھینچے گئے ہیں، ثابت کرو کہ

(۱) مستویات کا خط تقاطع ان، ا ق کی سطح مستوی پر عمود ہوگا

(۲) متقاطع سطوح کا دو سطحی زاویہ، عمادوں کے درمیانی زاویہ کے مساوی ہے یا اس کا مکمل ہے۔

۵۔ اگر ا ب، ج د دو موج خط ہوں تو ثابت کرو کہ خطوط ا ج، ب د بھی موج ہونگے۔

ان موج خطوط ا ب، ج د کے ظل کن مستوی سطحوں پر ایک دوسرے کے متوازی ہونگے؟

۶۔ ثابت کرو کہ فضا کے کسی دئے ہوئے نقطہ میں سے صرف ایک ہی خط کھینچا جاسکتا ہے جو دو مفروضہ موج خطوں میں سے ہر ایک کو قطع کرے۔

۷۔ وا، وب، وج تین متراکز خطوط مستقیم ہیں اور ان میں سے ہر ایک باقی دو پر عمود ہے، ثابت کرو کہ

(۱) اگر ولا، وما، و سے بالترتیب ب ج، ج ا، ا ب

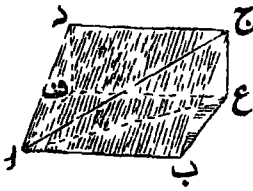
پر عمود ہوں تو مثلث لاماسے، مثلث ا ب ج کا مثلث پائیں ہوگا

(۲) اگر ا ب ج کی سطح مستوی پر عمود ون نکالا جائے تو

ن مثلث ا ب ج کا مرکز عمودی ہوگا۔

۸۔ ا ب ج د ایک سطح مائل ہے اور اس سطح میں ا ب، ج د

افقی خط ہیں، اور ا د، ب ج خطوط میلان اعظم ہیں
 نیز ا د، ب ج کے ظل افقی سطح پر بالترتیب ا ف، ب ع
 ہیں



اگر $\angle ج ب ع = ۹۰^\circ$

$\angle د ا ج = ۹۰^\circ$

$\angle ج ا ع = ۹۰^\circ$

$\angle ف ا ع = ۹۰^\circ$

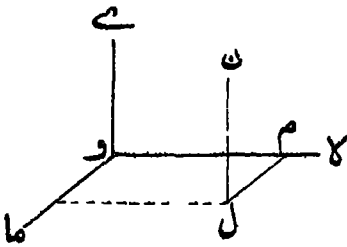
ثابت کرو کہ

(۱) جب ط = جب ع حجم بہ (۲) مس ف = مس بہ قط ع

(۳) مس ع = مس ط قط ف (۴) جب بہ = جب ف حجم ط

حوالہ کے محوروں کے ذریعہ فضا میں کسی نقطہ کے مقام

کا تعین



فرض کرو کہ ولا، وما

دونوں ثابت مستقیم خط ہیں

جو ایک دوسرے کو مہد

و پر علی التوائم قطع کرتے

ہیں، ولا، وما کی سطح

مستوی پر و سے عمود

کھینچو، تب خطوط ولا،

وما، و سے ہر ایک باقی دو خطوط پر اور اس لئے ان کی سطح

مستوی پر عمود ہے، خطوط ولا، وما، وے کو حوالہ کے لئے محور قرار دیتے ہیں اور کسی نقطہ کے محل کا تعین بلحاظ ان محوروں کے حسب ذیل طریقہ سے کیا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ نقطہ ن کا ظل سطح مستوی لا وما پر ملے ہے نیز فرض کرو کہ نقطہ ل کے متحد بلحاظ محاور ولا، وما کے وم، م ل ہیں اور لا، ما، ی بالترتیب وم، م ل، ل ن کے طولوں کو تعبیر کرتے ہیں، تب وم، م ل، ل ن کو نقطہ ن کے متحد کہتے ہیں۔

نقطہ ن کو (لا، ما، ی) سے تعبیر کرتے ہیں اور اگر (لا، ما، ی) کی عددی قیمتیں معلوم ہوں تو نقطہ ن کا محل معلوم ہو سکتا ہے۔
مثال ۱۔ ایک نقطہ کے متحد ۵، ۳، ۴ ہیں، نقشہ پر نقطہ کے مقام کی نشان دہی کرو۔

پہلے بلحاظ محاور ولا، وما کے اُس نقطہ کی نشان دہی کرو جس کے متحد ۵، ۳ ہیں، اس نقطہ کا نام ل رکھو اور ل ن سطح مستوی لا وما پر عمود کھینچو اور اس کے طول کو چار اکائیوں کے مساوی بناؤ، اس طرح نقطہ ن کا محل معلوم ہو گیا۔

ظاہر ہے کہ نقطہ ن کے متحد دراصل اس کے فاصلے ہیں حوالہ کی سطوح مستوی ما وے، وے ولا، لا وما سے، اب یہ سطحیں فضائے کو آٹھ حصوں میں تقسیم کرتی ہیں اور ان سب حصوں میں ایک ایک نقطہ ایسا ہے جن کے فاصلے ان سطوح مستویہ سے ۵، ۳، ۴ ہیں، ان سب نقطوں کے متحدوں کو ان طولوں

کے مطابق جن کی تشریح پہلے ہو چکی ہے مثبت اور منفی علامتوں کے ذریعہ تمیز کیا جاتا ہے۔

جو خط محاور ولا، وما، وے پر یا ان کے متوازی ان سمتوں میں ناپے جائیں جو ان محاور کے حروف سے ظاہر ہوتی ہیں وہ مثبت خطوط کہلاتے ہیں اور جو ان محاور پر یا ان کے متوازی مقابل سمتوں میں ناپے جائیں وہ منفی خطوط کہلاتے ہیں

مشقیں

۱۔ ذیل کے نقطوں کے محل شکل میں دکھاؤ۔

- (۱) (۳، ۵، ۴) (۲) (۵، ۴، ۳)
(۳) (۵، ۴، ۳) (۴) (۴، ۵، ۳)

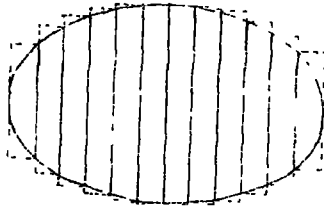
۲۔ ایک نقطہ ن کے محدود (۶، ۸، ۱۰) ہیں، ون کے وسطی نقطہ ق کے محدود معلوم کرو۔

۳۔ اگر کسی نقطہ ن کے محدود (لا، ما، ی) ہوں تو ثابت کرو کہ $ون^۲ = لا^۲ + ما^۲ + ی^۲$

اگر نقطہ ن (۳، ۴، ۱۲) ہو تو ون کا طول معلوم کرو۔

مجسمہ اشکال

۱۔ اگر ایک مستوی شکل کو متساوی الفضل، متوازی مستقیم



خطوں سے کاٹ کر

چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں

میں تقسیم کیا جائے اور

ان خطوں میں سے

دو دو کو علی التسلل

لینے سے مستطیل بنائے

جائیں جیسا کہ اس شکل میں کیا گیا ہے تو ہم ان ٹکڑوں کے

عرض کو لا انتہا کم کرنے سے شکل مفروضہ اور خطوط مستقیم

سے بنی ہوئی باہر کی شکل کے رقبوں کے تفاوت کو جتنا چاہیں

کم کر سکتے ہیں، بالفاظ دیگر شکل مفروضہ کا رقبہ ایسے سب

مستطیلی ٹکڑوں کے مجموعہ کی انتہائی قیمت کے مساوی خیال

کیا جاسکتا ہے جبکہ ان ٹکڑوں کے عرض کو لا انتہا کم کر دیا

جائے۔

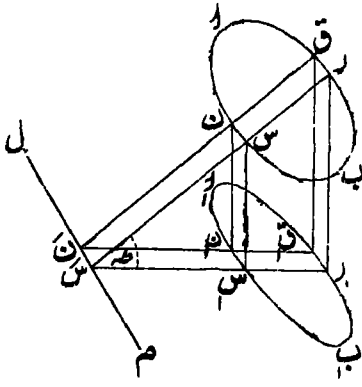
۲۔ اگر ا ب ایک مستوی شکل ہو اور اس کا ظل کسی

اور مستوی سطح پر جو ا ب کی سطح سے زاویہ طہ بنائے

ا ب ہو تو

ظل ا ب کا رقبہ = شکل ا ب کا رقبہ \times حجم طہ

فرض کرو کہ ان سطحوں کا خط تقاطع ل م ہے،



شکل ۱ ب کو ایسے متوازی
خطوط کے ذریعہ جو سب
کے سب ل م پر عمود
ہوں چھوٹے چھوٹے
ٹکڑوں میں تقسیم کرو۔
فرض کرو کہ اس
قسم کا ایک ٹکڑا

ن ق رس ہے اور اس کا ض ن ق ب س ہے۔

اب اگر ن ق رس کے عرض کو اور اس طرح ن ق رس
کے عرض کو نہایت کم کر دیا جائے تو انتہائی صورت میں دونوں
ٹکڑے مستطیل شکل کے ہونگے اور ان دونوں کا عرض ایک
ہی (یعنی ن س) ہوگا

نیز چونکہ ن ق کا طول = ن ق جم طہ

اس لئے ن ق ب س کا رقبہ = ن ق رس کا رقبہ × جم طہ

اسی طرح سے متناظر ٹکڑوں کے ہر زوج کے لئے
یہی ربط درست ہوگا جبکہ ان کے عرض کو لا انتہا کم کر دیا جائے

∴ شکل ۱ ب کا رقبہ = شکل ۱ ب کا رقبہ × جم طہ

۳۔ ایک مجسمہ شکل یا محض مجسمہ سے فضا کا وہ حصہ مراد ہے

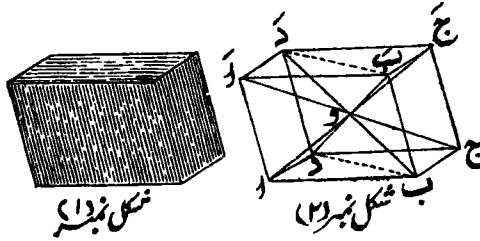
جو ایک یا ایک سے زیادہ مستوی یا منحنی سطحوں سے گھرا
ہو ہو۔ ان سطحوں کو مجسم کے رخ کہتے ہیں اور ہر دو

متصل رخنوں کا خط تقاطع کنارہ کہلاتا ہے۔

۴۔ کثیر السطوح سے مراد وہ مجسم ہے جو سطوح مستوی سے گھرا ہوا ہو۔

نوٹ۔ ایک مستوی مستقیم الاضلاع شکل میں ضروری ہے کہ کم از کم تین مستقیم خط ہوں، لیکن اگر دو خط متوازی ہوں تو کم از کم چار خط ہونے چاہئیں، اسی طرح سے ایک کثیر السطوح میں ضروری ہے کہ کم از کم چار سطحیں یا رخ ہوں لیکن اگر دو رخ متوازی ہوں تو کم از کم پانچ رخ ہونے چاہئیں۔

۵۔ متوازی السطوح وہ مجسم ہے جو متوازی سطوح مستوی کے تین زوجوں سے گھرا ہوا ہو۔



شکل ۲ میں سطح مستوی ا ب ا ب دو متوازی سطوح مستوی ا ب ج د اور ا ب ج د کو قطع کرتی ہے اسلئے کنارے ا ب، ا ب باہم متوازی ہیں۔

[مسئلہ ۱۱]

اسی طرح سے ثابت ہو سکتا ہے کہ (۱) متوازی السطوح کے چہ رخوں میں سے ہر ایک رخ ایک متوازی الاضلاع ہے (۲) مقابل کے رخ ہر لحاظ سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں اور (۳) بارہ کنارے چار چار کناروں کے تین جٹوں میں منقسم ہوتے ہیں اور ہر ایک جٹ

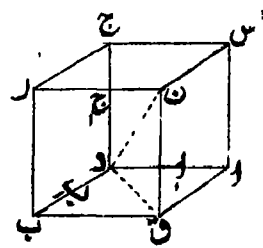
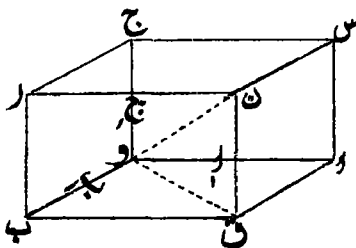
کے چار کنارے ایک دوسرے کے متوازی اور برابر ہیں۔

۶۔ ایک متوازی السطوح کے چار قطر ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔
فرض کرو کہ متوازی السطوح (ا ب ج د، ا ب ج د) کے قطر ا ج، ب د، ج د، اور د ب ہیں،
ب د، ب د کو ملاؤ

ثبوت - چونکہ ب ب ا د د ایک دوسرے کے متوازی اور مساوی ہیں اس لئے شکل ب د د ب متوازی الاضلاع ہے۔

∴ اس کے قطرب د، دب ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں یعنی خطب د، دب کے وسطی نقطہ و میں سے گزرتا ہے۔

۷۔ جس متوازی السطوح کے رخ مستطیل شکل کے ہوں اس کو



مکعب نما یا مستطیلی مجسم کہتے ہیں، اگر اس کا ہر ایک رخ مربع ہو تو متوازی السطوح کو مکعب کہتے ہیں۔

اشکال بالا میں \triangleright ج و \triangleleft د اور \triangleright ج و \triangleleft ب دونوں قائمے ہیں
 \therefore خط وج رخ \perp ب پر عمود ہے

اسی طرح سے ہر ایک کنارہ ان دو سطحوں پر عمود ہے جن کو یہ قطع کرتا ہے اور ہر ایک رخ ان چار رُخوں پر عمود ہے جنکو یہ قطع کرتا ہے۔

۸۔ ایک مستطیلی مجسم کے قطر کا مربع اس کے تین متراکز کناروں کے مربعوں کے مجموعہ کے برابر ہوتا ہے۔

فرض کر دو کہ مکعب نما کے تین متراکز کنارے د، ب، و ج ہیں جن کے طول بالترتیب \perp ، \perp ، \perp ج ہیں اور اس کا قطر و ن ہے۔

وق کو ملاؤ۔

تب چونکہ \perp ن ق عمود ہے رخ \perp ب پڑ اس لئے یہ وق پر بھی عمود ہے

$$\therefore \text{ون}^2 = \text{وق}^2 + \text{نق}^2 = \text{وق}^2 + \text{ج}^2$$

$$\text{لیکن } \text{وق}^2 = \text{ولا}^2 + \text{اق}^2 = \text{لا}^2 + \text{با}^2$$

کیونکہ \triangleright و ا ق قائمہ ہے

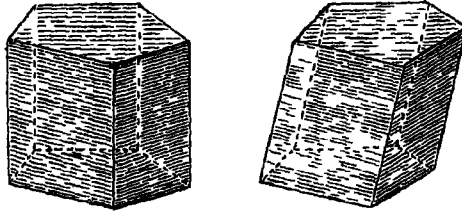
$$\therefore \text{ون}^2 = \text{لا}^2 + \text{با}^2 + \text{ج}^2$$

فرع ۱۔ ایک مکعب نما کے سب قطر باہم مساوی ہوتے ہیں

فرع ۲۔ اگر ایک مکعب کا ہر ایک کنارہ \perp ہو

$$\text{تو قطر}^2 = \text{لا}^2 + \text{با}^2 + \text{ج}^2 = 3\text{لا}^2$$

نوٹ۔ اگر کسی نقطہ ن کے محدد (لاٹائی) سے تعبیر کئے جائیں اور نقطہ و مبدأ ہو تو $ون^2 = لا^2 + ما^2 + می^2$
 ۹۔ منشور وہ مجسم ہے جو ایسی متوازی سطحوں سے گھرا ہوا ہو جن میں سے دو سطحیں (جو منشور کے سرے کہلاتی ہیں) ایک دوسرے کے متوازی اور ہر طرح سے مساوی ہوں اور باقی (جن کو طرفی رُخ یا پہلو کہتے ہیں) شکل میں متوازی الاضلاع ہوں۔

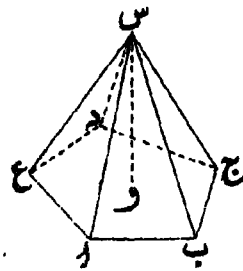
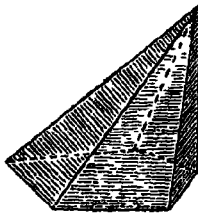


ایک منشور کے سرے مختلف، ذوار بعتہ الاضلاع اور کسی تعداد اضلاع کی اشکال کثیر الاضلاع ہو سکتی ہیں اور ان پر جو منشور بنتے ہیں۔ ان کو بالترتیب مثلثی، ذوار بعتہ الاضلاعی یا کثیر الاضلاعی منشور کہتے ہیں ہر منشور کے طرفی کنارے مساوی اور متوازی ہوتے ہیں، جس منشور کے طرفی کنارے اس کے سروں پر عمود ہوں اس کو قائم منشور کہتے ہیں، ایسے منشور کے طرفی رُخ شکل میں مستطیل ہوتے ہیں، باقی سب کو مائل منشور کہتے ہیں۔

متوازی اسطوح منشور کی ایک خاص صورت ہے اور مکعب نما اور مکعب ، قائم منشوروں کی خاص صورتیں ہیں ۔

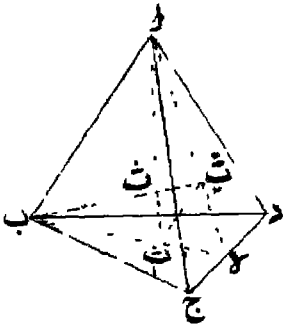
مسئلہ ۱۱ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ منشور کی مستوی تراش جو ایک سرے کے متوازی ہو وہ ہر سرے کے ہر طرح سے مساوی ہوتی ہے
۱۰۔ مخروط مضلع وہ مجسم ہے جو مستوی سطحوں سے گھرا ہوا ہو جن میں سے ایک سطح جس کو قاعدہ کہتے ہیں کوئی مستقیم الاضلاع شکل ہو اور باقی سطحیں مثلث ہوں جن کے راس ایک ہی نقطہ پر قاعدہ کی سطح کے باہر واقع ہوں ۔

اگر ایک مخروط مضلع کا قاعدہ کوئی منتظم کثیر الاضلاع واجب دوع ہو اور اس کا راس اس اُس خط پر واقع ہو جو قاعدہ کے وسطی نقطہ و (یعنی اندرونی یا بیرونی دائرہ کے مرکز) سے قاعدہ پر



عمود ہو تو مخروط مضلع کو قائم مخروط مضلع کہتے ہیں ۔

۱۱۔ ذواربعتہ السطوح (چهار سطحی) وہ مخروط منقطع ہے جسکا قاعدہ ایک مثلث ہو۔ ظاہر ہے کہ پانچویں رخ اس مجسمہ کا احاطہ کرتے ہیں
 ۱۲۔ وہ چار خطوط مستقیم جو ذواربعتہ السطوح کے ہر ایک راس کو اس کے مقابل کے رخ کے ہندسی مرکز سے ملاتے ہیں وہ سب کے سب ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور یہ نقطہ ان میں سے ہر ایک کو نسبت ۳ : ۱ میں تقسیم کرتا ہے۔



ایک ذواربعتہ السطوح
 (ا، ب ج د) میں فرض کرو
 کہ اُن رخوں کے ہندسی مرکز
 جو رؤس الزوایا ا، ب، ج، د
 کے مقابل ہیں بالترتیب
 ث، ث، ث، ث ہیں
 ثابت یہ کرنا ہے کہ ث، ث، ث، ث

ب، ث، ج، ث، د، ث، ا، ث ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں۔
 کنارہ ج د کا وسطی نقطہ لا، ث ب اور ث، ا لازماً ب لا اور لا، ا
 پر بالترتیب واقع ہونگے اور ب لا = ۳ ث لا
 نیز لا = ۳ ث لا

لہذا ث، ث، ا، ب کے متوازی ہے
 نیز لا، ث، ب ضرور ایک دوسرے کو قطع کریں گے
 کیونکہ یہ دونوں سطح مستوی لا، ب میں واقع ہیں۔ اگر ان
 کا نقطہ تقاطع ث ہو تو متشابه مثلثوں سے

ا ث : ث ث = ا ب : ث ث

= ا لا : لا ث = ۱ : ۳

∴ ب ث، ا ث کو ایک ایسے نقطہ ث پر قطع کرتا ہے

جس کا فاصلہ ث سے = $\frac{1}{3}$ ا ث

اسی طرح سے ثابت کیا جاسکتا ہے کہ ج ث، د ث

دونوں ا ث کو اسی نقطہ پر قطع کرتے ہیں، یعنی یہ سب

خطوط ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں

مشق تین خطوط مستقیم جو ایک ذو اربعہ اسطوح کے مقابل کے کناروں

کے وسطی نقطوں کو ملاتے ہیں ایک ہی نقطہ میں سے گزرتے ہیں اور

ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

[فرض کرو کہ ج د، د ا، ا ب، ب ج کے وسطی نقطے بالترتیب

لا، ما، مے، ہ ہیں، پہلے مسئلہ ۸ مشق ۲ کی رو سے ثابت کرو کہ شکل

لا، ما، مے، ہ ایک متوازی الاضلاع ہے، پھر اس کے قطروں

پر غور کرو]

۳۱- (۱) قاعدہ کے متوازی مخروط مصنع کی کوئی مستوی تراش

قاعدہ کے متشابه ہوتی ہے

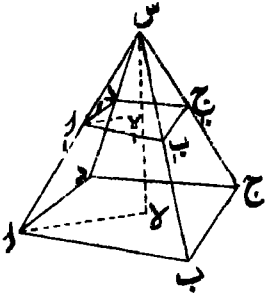
(۲) ایسی کسی تراش کا رقبہ اُس فاصلہ کے مربع کے

متناسب ہوتا ہے جو اُس تراش کا مخروط مصنع کے راس

سے ہو۔

فرض کرو کہ مخروط مصنع (س، ا ب ج د) میں تراش

(ا ب ج د) قاعدہ (ا ب ج د) کے متوازی ہے۔



(۱) چونکہ سطوح مستوی
 ا ب ج د اور ا ب ج د
 متوازی ہیں اور سطح مستوی
 ا ب ج د ان دونوں کو
 قطع کرتی ہے اس لئے خطوط
 تقاطع ا ب، ا ب، ا ب متوازی
 ہیں۔

اسی طرح سے ب ج، ج ا، ج د
 اور ج د، ج د اور د ا، د ا متوازی ہیں۔
 ∴ اشکال ا ب ج د اور ا ب ج د کے متناظر زاوے
 برابر ہیں۔

اور متشابہ مثلثوں سے $\frac{ا ب}{ا ب} = \frac{ب ج}{ب ج} = \frac{ج د}{ج د} = \frac{د ا}{د ا}$
 لہذا اشکال ا ب ج د اور ا ب ج د ایک دوسرے
 کے متشابہ ہیں۔

(۲) فرض کرو کہ اگر رأس س میں سے قاعدہ پر عمود
 نکالا جائے تو یہ عمود تراش ا ب ج د سے لا پر اور
 ا ب ج د سے لا پر ملتا ہے، لا، لا کو ملاؤ
 تب شکل ا ب ج د : شکل ا ب ج د
 $= ا ب : ا ب$

$= س ا : س ا$ [متشابہ مثلثوں سے]

$$= \text{س ل} : \text{س ل}^2$$

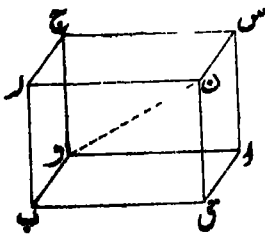
نتیجہ صریح۔ اگر دو مضلع مخروطوں کے ارتفاع اور ان کے قاعدوں کے رقبے باہم مساوی ہوں تو مضلع مخروطوں کی ان ترانٹوں کے رقبے جو قاعدوں کے متوازی ہوں اور جن کے فاصلے رأسوں سے برابر ہوں باہم مساوی ہوں گے۔

مشقیں

۱۔ لوہے کی ایک مربع چادر کا ہر ایک ضلع ۱۲ فٹ ہے اس کو ایک دیوار کے ساتھ اس طرح کھڑا کیا گیا ہے کہ اس کا زاویہ میلان افق کے ساتھ ۹۰ درجہ ہے بتاؤ کہ زمین کے کس قدر رقبہ کو یہ انتصابی سمت کی بارش سے محفوظ رکھ سکتا ہے؟

۲۔ (۱) ذیل کے مستطیلی مجسم میں $12 = \text{سنٹی میٹر}$ ، $9 = \text{سنٹی میٹر}$ ، $8 = \text{سنٹی میٹر}$ ۔ دن، جم ق ون اور شکل وان ر کے رقبہ کی قیمتیں دریافت کرو۔

(۲) اگر ون خطوط و ا،



دب، وج کے ساتھ بالترتیب

زاوئے ع، ب، جہ بنائے تو

ثابت کرو کہ $\text{جم ع} + \text{جم ب} + \text{جم ج} = 1$

اور ان خطوں کی جو قیمتیں

اوپر مندرج ہیں ان کے

لحاظ سے اس نتیجہ کی تصدیق کرو۔

(۳) دن میں سے گزرنے والی کوئی سطح مستوی ب ق کے متوازی ہے؟

اگر وہ = د، دب = ب، وج = ج تو ثابت کرو کہ دن اور ب ق کے درمیان چھوٹے چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ $\frac{ب ج}{ب ق}$ ہے۔

۳۔ اگر ایک متوازی السطوح کو ایک ایسی سطح مستوی سے کاٹا جائے جو اس کے متقابل رخوں کے دوزو جوں کو قطع کرے تو ثابت کرو کہ خطوط تقاطع ایک متوازی الاضلاع بناتے ہیں۔

۴۔ ثابت کرو کہ وہ اشکال کثیر الاضلاع جو کسی منشور کو متوازی سطوح مستوی سے کاٹنے سے حاصل ہوتی ہیں ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

۵۔ اگر ایک ذواربعتہ السطوح کا ہر ایک کنارہ مقابل کے کنارے کے برابر ہو تو ثابت کرو کہ ہر کونے پر کے تین مستوی زواویوں کا مجموعہ ۱۸۰ کے برابر ہے۔

۶۔ دو مستوی سطحیں ایک دوسرے کو ۴۵° کے زاویہ پر کاٹتی ہیں اور ایک سطح پر ۵ سنتی میٹر کے نصف قطر کا دائرہ کھینچا گیا ہے اور اس کا ظل دوسری مستوی سطح پر بنایا گیا ہے۔

(۱) ظل کے سب سے بڑے دتر کا طول اور (۲) ظل کا رقبہ دریافت کرو۔

۷۔ اگر ایک ذواربعتہ السطوح کو ایک سطح مستوی سے کاٹا جائے

جو اس کے مقابل کے کسی دو کناروں کے متوازی ہو، تو ثابت کرو کہ تراش متوازی الاضلاع ہوگی۔

۸۔ ثابت کرو کہ ایک منتظم ذواربعتہ اسطوح کے مقابل کے کناروں کا چھوٹے سے چھوٹا فاصلہ اُس مربع کے قطر کا نصف ہوگا جو مجسم مذکور کے ایک کنارہ پر بنایا جائے۔

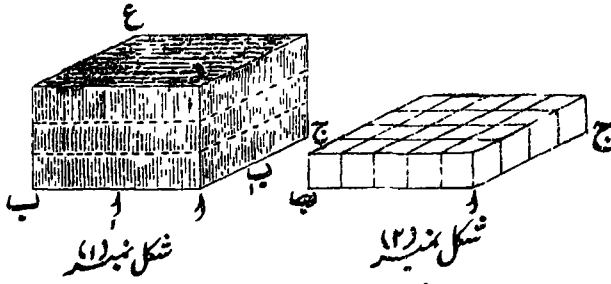
۹۔ اگر ایک ذواربعتہ اسطوح میں مقابل کے کناروں کے دو زوج ایسے ہوں کہ ہر زوج کے کنارے آپس میں زاویہ قائمہ بنائیں تو ثابت کرو کہ تیسرے زوج کے کنارے بھی آپس میں زاویہ قائمہ بنائیں گے۔

۱۰۔ اگر ایک ذواربعتہ اسطوح میں مقابل کے کنارے ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں تو مقابل کے کناروں کے مربعوں کا مجموعہ ہر زوج کی صورت میں وہی ہوگا۔

سطحیں اور حجم

۱۲۔ کسی مجسم کے حجم سے فضا کا وہ حصہ مراد ہوتا ہے جو مجسم کے احاطہ کرنے والی سطحوں کے اندر گھرا ہوا ہو۔
ایک مکعب اینچ ایک ایسے مکعب کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جس کے ہر کنارے کا طول ایک اینچ ہو، اسی طرح ایک مکعب سنتی میٹر ایک ایسے مکعب کے حجم کو تعبیر کرتا ہے جس کے ہر کنارے کا طول ایک سنتی میٹر ہو، پس حجم کی اکائی سے مراد ایک ایسے مکعب کا حجم ہے جس کا ہر کنارہ طول کی ایک اکائی کے برابر ہو۔

۱۵۔ ایک مستطیلی مجسم کی سطح اور حجم دریافت کرو۔



سطح۔ فرض کرو کہ شکل (۱) کے مکعب نمایں طول $ا = ب$ ، $ا$ اکائیاں
عرض $ا = ج$ ، $ب$ اکائیاں اور ارتفاع $ا = ع$ ، $ج$ اکائیاں
 $ا$ ب مجسم کی کل سطح مقابل کے مساوی مستطیل رخوں
کے تین زوجوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

لیکن $د$ ، $د$ ، $د$ ، $د$ ، $ج$ رخوں میں بالترتیب $ا$ ، $ب$ ،
 $ا$ ، $ج$ ، $ب$ ، $ج$ رقبہ کی اکائیاں شامل ہیں۔
∴ مجسم کی کل سطح $= ۲ا$ ، $۲ب$ ، $۲ج$ + $۲ا$ ، $۲ب$ ، $۲ج$ رقبہ
کی اکائیاں۔

اگر $ا = ب = ج$ ، تو مستطیلی مجسم ایک مکعب بن جاتا
ہے جس کے ہر کنارے میں طول کی $ا$ اکائیاں ہوتی ہیں
اسلئے مکعب کی کل سطح $= ۶ا$ رقبہ کی اکائیاں
حجم۔ ایک مکعب نما پر غور کرو جس کا طول $ا = ب = ۵$ انچ،
عرض $ا = ج = ۴$ انچ، ارتفاع $ا = د = ۳$ انچ، شکل (۱)
سے ظاہر ہے کہ مجسم مذکور ہمیں مساوی قاسٹوں میں منقسم

ہو سکتا ہے جن میں سے ہر قاش کی موٹائی ایک انچ ہے ،
نیز ہر قاش کو پھر (دیکھو شکل ۲) مکعبی ٹکروں میں تقسیم کر سکتے
ہیں جن میں سے ہر ٹکڑے کے مساوی کنارے ایک ایک
انچ ہیں ، پس ہر ٹکڑا ایک مکعب انچ کے برابر ہوگا۔

اب ایک قاش میں مکعب انچوں کی تعداد $۴ \times ۵ \times ۶$ ہے
پس کل مجسمہ میں مکعب انچوں کی تعداد $۴ \times ۵ \times ۶ = ۱۲۰$

اسی طرح سے اگر طول = ۱ خطی اکائیاں

عرض = ۲ خطی اکائیاں

ارتفاع = ۳ خطی اکائیاں

تو مستطیلی مجسمہ میں حجم کی $۱ \times ۲ \times ۳$ ج اکائیاں ہوں گی

اور اگر ایک مکعب ہر ایک کنارہ = ۱ خطی اکائیاں

تو اس مکعب میں ۱ حجم کی اکائیاں ہوں گی۔

یہ مفہوم اختصاراً اس طرح ادا کیا جاتا ہے

مکعب نما کا حجم = طول \times عرض \times ارتفاع (۱)

= قاعدہ کا رقبہ \times ارتفاع (۲)

مکعب کا حجم = (کنارہ)^۳ (۳)

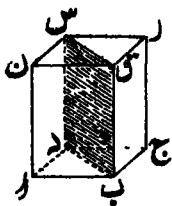
فرع۔ ایک مکعب نما (ا ب ج د، ن ق ر س)

کو اس کی قطری سطح

مستوی ب د س ق دو

ایسے قائم منشوروں میں تقسیم کرتی

ہے جن کے قاعدے متطابق



قائم الزاویہ مثلث ہیں اور نیز یہ دونوں منشور ہر لحاظ سے ایک دوسرے کے مساوی ہیں اور ہر ایک کا حجم پورے مکعب نما کے حجم کا نصف ہے۔

مشقیں

۱۔ ایک کمرہ کے طول، عرض، اور بلندی میں بالترتیب ۱، ۲، ۳ اور ج اکیاں شامل ہیں، ثابت کرو کہ چار دیواروں میں رقبہ کی ۲ ج (۱+۲+۳) اکیاں ہوں گی، اگر چار دیواروں کا رقبہ ۷۰ و ۸۶ مربع میٹر ہو اور بلندی ۳ میٹر، تو فرش کا مجموعہ اضلاع معلوم کرو۔

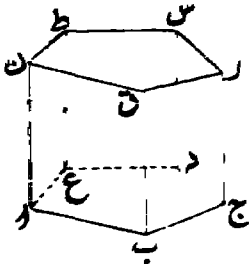
۲۔ اگر ایک حوض کی لمبائی چوڑائی اور گہرائی بالترتیب ۲۵ سنی میٹر، ۸۰ سنی میٹر اور ۶۵ سنی میٹر ہو، تو اس کی گنجائش میٹروں میں دریافت کرو، نیز اس پانی کا وزن کلوگراموں میں دریافت کرو جو حوض کے پچھلے حصہ کو بھر سکے۔

۳۔ ایک خاص مقام پر سالانہ بارش ۶۵ سنی میٹر ہوتی ہے۔ بتاؤ کہ یہ فی ہیکٹر کتنے لیٹروں کے مساوی ہے؟

۴۔ سنگ مرمر کے ایک مستطیلی ٹکڑے کے ابعاد ۲۰، ۱۰ میٹر، ۷۵ میٹر اور ۵۰ میٹر ہیں، اگر سنگ مرمر کا وزن فی مکعب دسی میٹر ۲۵۶۴ کلوگرام ہو تو پورے ٹکڑے کا وزن دریافت کرو۔

[مکعب نامجسمات پر مزید مشقوں کے لئے ملاحظہ ہو صفحہ ۸۰]

۱۶۔ ایک قائم منشور کی طرفی سطح کا رقبہ دریافت کرو۔ فرض کرو کہ مفروضہ منشور کے قاعدہ کے اضلاع ۱ ب، ۲ ب ج، ۳ ج، ۴ ج، ۵ ج، ۶ ج، ۷ ج، ۸ ج، ۹ ج، ۱۰ ج، ۱۱ ج، ۱۲ ج میں بالترتیب طول کی

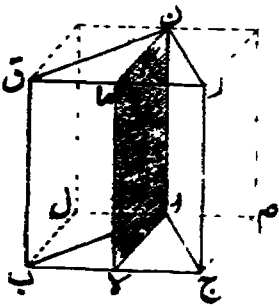


ا، ب، ج، اکائیاں
شامل ہیں اور منشور کا ارتفاع
ف ہے۔

چونکہ منشور قائم ہے اسلئے
اس کے ہر ایک رخ کا کنارہ
ف ہے اور ہر طرفی رخ یا پہلو
ایک مستطیل ہے۔

تب مستطیل ا، ب، ق، ن کا رقبہ = ا، ف اور اسی طرح سے
باقی پہلوؤں کے رقبے بالترتیب ب، ف، ج، ف، ہیں
∴ منشور کی طرفی سطح کا رقبہ = ا، ف + ب، ف + ج، ف +
= (ا + ب + ج +) ف رقبہ کی اکائیاں

= قاعدہ کا محیط × ارتفاع
۱۷۔ ایک قائم منشور کا
حجم دریافت کرو۔



(۱) پہلے ایک مثلثی منشور
(ا، ب، ج، ن، ق، ر) پر غور
کرو اور فرض کرو کہ اس کا
ارتفاع ف ہے۔

ان میں سے ایک سطح

مستوی ان مالا کھینچو جو رخ ب، ج، ر، ق پر عمود ہو،
یہ سطح منشور مذکور کو دو ایسے منشوروں میں تقسیم کرتی ہے

جن کے قاعدے قائم الزاویہ مثلث الا ب اور الا ج ہیں۔

و میں سے ل م، ب ج کے متوازی کھینچو اور مستطیل ب ل م ج کی تکمیل کرو، پھر مستطیل ب ل م ج کو قاعدہ مان کر اس پر ایک مکعب بناؤ جس کا ارتفاع ف ہو۔

تب قاعدہ الا ب پر کا منشور = $\frac{1}{3}$ (قاعدہ الا ب ل پر کا مکعب)

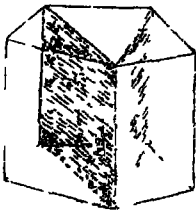
اور قاعدہ الا ج پر کا منشور = $\frac{1}{3}$ (قاعدہ الا ج م پر کا مکعب)

∴ قاعدہ ا ب ج پر کا منشور مفروضہ = $\frac{1}{3}$ (قاعدہ ل ب ج م پر کا مکعب)

= $\frac{1}{3}$ مستطیل ل ب ج م × ارتفاع

= (قاعدہ ا ب ج کا رقبہ) × ارتفاع

(۲) اسی طرح سے اگر منشور کا قاعدہ کوئی کثیر الاضلاع ہو تو اس کو ہمیشہ ایسے متعدد منشوروں میں تقسیم کیا جاسکتا ہے جن میں سے ہر ایک کا قاعدہ ایک مثلث ہو اور ارتفاع وہی ہو جو اصلی منشور کا ہے۔



∴ کسی قائم منشور کا حجم
= (مثلثی قاعدوں کا مجموعہ) × ارتفاع
= (منشور مفروضہ کا قاعدہ) × ارتفاع

مستطیلی مجسموں اور قائم منشوروں پر مشقیں

[ایک میٹر ایک مکعب دسی میٹر کے مساوی ہوتا ہے، پانی کے ایک مکعب دسی میٹر کا وزن ایک کلو گرام ہوتا ہے، کسی شے کی کثافت اضافی

سے مراد وہ نسبت ہوتی ہے جو اس شے کے وزن کو شے مذکور کے مساوی الجحم پانی کے وزن کے ساتھ ہو۔
مثلاً اگر فولاد کی کثافت اضافی ۷۸ و ۷۹ ہو تو اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ فولاد کے ایک مکعب دسی میٹر کا وزن ۷۸ کلوگرام ہے]

۱۔ زمین کھودنے کی ایک مشین کے برے کی تراش کا رقبہ ۱۳۲۵ مربع فٹ ہے اور مشین ایک دن میں ۴ فٹ نیچے جاتی ہے، بتاؤ کہ ایک دن میں کتنے مکعب گز زمین کھودی جاتی ہے
۲۔ ایک خندق کی لمبائی ۲۵ و ۲۱ میٹر اور چوڑائی ۵۰ میٹر ہے۔ خندق کے اندر پانی ہے جس کی گہرائی ۶۴ سنتی میٹر ہے پانی کا وزن کلوگراموں میں معلوم کرو۔

۳۔ فولاد کی ایک سلخ ۱۶۲۸ میٹر لمبی، ۱۵ سنتی میٹر چوڑی اور ۵ سنتی میٹر موٹی ہے، فولاد کی کثافت اضافی ۷۸ ہے، سلخ کا وزن دریافت کرو۔

۴۔ پتھر کے کوئلہ کی ایک ہموار تہ کی اوسط موٹائی ۳ ۱/۲ فٹ ہے، بتاؤ کہ اس میں سے فی ایکڑ کتنے ٹن کوئلہ دستیاب ہوتا ہے۔

[پانی کے ایک مکعب فٹ کا وزن = ۱۰۰۰ اونس

اور کوئلہ کی کثافت اضافی = ۱۶۲۸]

۵۔ ایک تالاب کی تہ اور اطراف کو پلستر کرنا منظور ہے، اگر

اخراجات فی مربع میٹر ۷ پنس ہوں اور تالاب ۲۶۵ میٹر لمبا،
۱۵۲۴ میٹر چوڑا اور ۱۵۵۰ میٹر گہرا ہو تو کل خرچ قریب ترین
پنس تک معلوم کرو۔

۶۔ جت کے ۳ ملی میٹر موٹے ایک ٹکڑے کا وزن فی مربع میٹر
معلوم کرو جبکہ جت کی کثافت اضافی ۷۱۴ ہو۔

۷۔ ایک صندوق باہر کی طرف سے ۱۶۶۵ میٹر لمبا، ۱۵۲۵
میٹر چوڑا، ۵۵ میٹر اونچا ہے، اس کے تختوں کی موٹائی
۲۵ ملی میٹر ہے، صندوق کے اندر وئی ابعاد معلوم
کرو اور صندوق کے پینڈے اور اطراف پر دہات چڑھانے کا صرفہ
اشلنگ ۳ پنس فی مربع میٹر کے حساب سے قریب ترین پنس تک
معلوم کرو۔

۸۔ ایک کعب کے ایک کنارے کا طول معلوم کرو جبکہ

(۱) اس کی سطح ۲۶۵۳۵۰ مربع میٹر ہو

(۲) اس کا حجم ۲۷۶۲۵ کعب سنتی میٹر ہو

۹۔ لکڑی کا ایک بند صندوق مساوی موٹائی کے تختہ کا بنا ہوا
ہے، باہر کی طرف سے یہ ۱۲ سنتی میٹر لمبا، ۱۰ سنتی میٹر چوڑا اور
۸ سنتی میٹر اونچا ہے اور اندر کی طرف سے صندوق کی سطح ۳۷۶
مربع سنتی میٹر ہے، تختہ کی موٹائی معلوم کرو۔

۱۰۔ ایک مستطیلی مجسم کی کل سطح ۱۳۳۲ مربع سنتی میٹر ہے،
اگر اس کے ابعاد ۴ : ۵ : ۶ کی نسبت میں ہوں تو اس کا طول
عرض اور بلندی معلوم کرو۔

۱۱۔ ایک مستطیلی مجسم کی کل سطح ۲۱۴ مربع سنتی میٹر ہے، اسکے قاعدہ میں ۴۲ مربع سنتی میٹر ہیں اور اس کے ایک انتصابی رخ میں ۳۵ مربع سنتی میٹر کناروں کے طول دریافت کرو۔

۱۲۔ ایک مکعب کا قطر ۱۰ سنتی میٹر ہے، اس کے کنارہ کا طول قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو، نیز مکعب کی کل سطح اور حجم دریافت کرو۔

۱۳۔ ایک مستطیلی مجسم کی بلندی ۳ سنتی میٹر ہے اور اس کے قاعدہ کا رقبہ ۴۸ مربع سنتی میٹر ہے، اگر اس کا قطر ۱۰ سنتی میٹر ہو تو مجسم کا طول اور عرض معلوم کرو۔

۱۴۔ ایک مستطیلی مجسم کا قطر ۱۷ سنتی میٹر ہے اور اس کی کل سطح ۵۵۲ مربع سنتی میٹر ہے، اس کے تینوں ابعاد کا حاصل جمع معلوم کرو۔

۱۵۔ ایک مستطیل شکل کا تالاب ہے، اس کے پیندے کے طول اور عرض بالترتیب ۲۰ فٹ اور ۱۶ فٹ ہیں، اگر تالاب میں ایک ٹل کے ذریعہ ۴۰ گیلن فی منٹ کے حساب سے پانی بھرا جائے تو بتاؤ کہ فی گھنٹہ کتنے انچ پانی اوپر چڑھے گا جبکہ $\frac{1}{4}$ گیلن تقریباً ایک مکعب فٹ کے برابر محسوب کئے جائیں۔

قائم منشوروں پر

۱۶۔ ایک قائم منشور کا قاعدہ ایک مثلث Δ ہے جس کا زاویہ ج قائم ہے، اگر Δ ج = ۱۵ سنتی میٹر، ج ف = ۸ سنتی میٹر اور منشور کی بلندی = ۱۲ سنتی میٹر تو منشور کا حجم اور طرفی سطح معلوم کرو۔

۱۷۔ ایک قائم منشور کا قاعدہ ایک مثلث ہے جس کے اضلاع ۷ سنتی میٹر، ۱۰ سنتی میٹر اور ۹ سنتی میٹر ہیں، منشور کی بلندی ۱۰ سنتی میٹر ہے، اس کا حجم اور کل سطح معلوم کرو۔

۱۸۔ ایک قائم منشور کا قاعدہ ایک منحرف ہے جس کے متوازی اضلاع ۷ سنتی میٹر اور ۱۳ سنتی میٹر ہیں اور ان کا درمیانی فاصلہ ۸ سنتی میٹر ہے، اگر منشور کی بلندی ایک میٹر ہو تو اس کا حجم مکعب سنتی میٹروں میں معلوم کرو۔

۱۹۔ ایک دیوار کے ساتھ سطح مائل کی شکل میں ریت کا ڈھیر پڑا ہے جس کی چوڑائی زمین پر ۴ فٹ ہے، سطح مائل افق کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے، ایک مکعب فٹ کے قریب ترین دسویں حصہ تک معلوم کرو کہ دیوار کی لمبائی کے ہر ایک فٹ کے مقابل کتنی ریت پڑی ہے۔

۲۰۔ ایک خندق کی عمودی تراش ایک منحرف ہے جس کا طول اوپر کے کنارہ پر ۱۵ فٹ اور پینڈے پر ۹ فٹ ہے، خندق کی گہرائی ہر جگہ ۸ فٹ ہے اور اس کا طول ۱۲ فٹ ہے، تقریباً کتنے گیلن اور کتنے ٹن پانی اس خندق میں آ سکتا ہے۔

(پانی کا ایک مکعب فٹ تقریباً $\frac{1}{4}$ گیلن کے مساوی ہوتا ہے اور اس کا وزن ۱۰۰۰ اونس سے تھوڑا کم ہوتا ہے)

۲۱۔ کوئلہ کی ایک ۱۴ فٹ موٹی تہ سطح کے ساتھ ۴۳° درجہ کا زاویہ بناتی ہے، بتاؤ کہ ایک ایکڑ سطح کے نیچے کتنے ٹن کوئلہ ہوگا۔

[کوئلہ کی موٹائی تہ پر عموداً ناپی گئی ہے، کوئلہ کا ایک ٹن ۲۸ مکعب فٹ

جسگہ گھیرتا ہے اور حجم $۲۳ = ۰.۵۹۲۰۵$ [

۲۲۔ لکڑی کے ایک ٹل کی عمودی تراش ایک مربع ہے جس کا ضلع ۸ سنتی میٹر ہے، ٹل میں سے ۲۰ میٹر فی منٹ کی یکساں رفتار سے پانی بہ رہا ہے، بتاؤ کہ دس لاکھ لیٹر پانی نکلنے کے لئے کتنا عرصہ درکار ہوگا۔

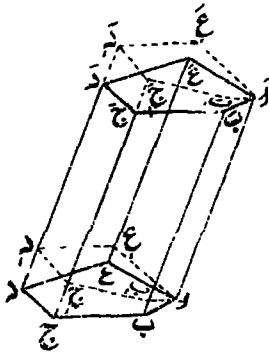
۲۳۔ ذیل کے قائم منشوروں کی طرفی سطحوں اور حجموں کا مقابلہ کرو۔
(۱) منشور کا قاعدہ ایک منتظم مسدس ہے جس کا ضلع ۸ سنتی میٹر ہے منشور کی بلندی ۶ سینٹی میٹر ہے۔

(۲) قاعدہ ایک منتظم مشمن ہے جس کا ضلع ۶ سنتی میٹر ہے، منشور کی بلندی ۸ سنتی میٹر ہے۔

۲۴۔ ریل کی سڑک کے لئے ۸۵۰ میٹر لمبی زمین کو ۵۰ و ۴۵ میٹر کی یکساں گہرائی تک کھودنا منظور ہے، کٹائی کی چوڑائی اوپر سے ۲۰ و ۳۱ میٹر اور نیچے سے ۸۰ و ۱۶۸ میٹر ہونی چاہئے۔ اگر ہر روز بالادست ۴۵ ٹن مٹی کھودی جائے اور ایک مکعب میٹر مٹی کا وزن $۲\frac{1}{4}$ ٹن ہو تو بتاؤ کہ کام کتنے عرصہ میں ختم ہوگا؟

۱۸۔ مائل منشور کا حجم دریافت کرد

ذیل کی شکل میں ایک مائل منشور (اب ج د ع، ا ب ج د ع) دکھایا گیا ہے جس کی قائم مستوی تراش یعنی ایسی تراش جو سب طرفی کناروں پر عمود ہو ا ب ج د ع ہے۔
اب فرض کرو کہ ا ب ج د ع اور ا ب ج د ع



کے درمیان کا ٹکڑا کاٹ کر
دوسرے سرے 'ا' ب ج د ع
پر اس طرح لگایا گیا ہے کہ 'ا' د
پر آتا ہے، 'ب'، 'ب' پر اور
علیٰ ہذا القیاس۔

اس طرح مفروضہ مائل
منشور ایک قائم منشور
(ا ب ج د ع، ا ب ج د ع)

بن جاتا ہے جسکے کنارے دئے ہوئے منشور کے کناروں کے
برابر ہیں اور جس کا حجم = سرے 'ا' ب ج د ع کا رقبہ \times 'ا' د
اس لئے مائل منشور کا رقبہ

= اس کی عمودی تراش کا رقبہ \times کنارہ (۱)
اب فرض کرو کہ قاعدہ 'ا' ب ج د ع اور عمودی تراش
'ا' ب ج د ع کے درمیان زاویہ طہ بنتا ہے، تب عمودی
بلندی ف اور کنارہ 'ا' د کا درمیانی زاویہ بھی طہ ہوگا۔ کیونکہ
یہ دونوں خطوط بالترتیب قاعدہ اور تراش کی سطوح مستوی
پر عماد ہیں۔

لہذا عمودی تراش 'ا' ب ج د ع = قاعدہ 'ا' ب ج د ع \times حجم طہ
نیز ف = 'ا' د حجم طہ

(۱) میں یہ قیمتیں مندرج کرنے سے

مائل منشور کا حجم = قاعدہ 'ا' ب ج د ع \times حجم طہ \times 'ا' د

= قاعدہ ا ب ج د ع × ف

پس مائل منشوروں کی صورت میں بھی قائم منشوروں کی مانند

حجم = (قاعدہ کا رقبہ) × (عمودی ارتفاع)

ثابت کرو کہ ایک مائل منشور کی طرفی سطح

= عمودی تراش کا محیط × کنارہ

اس کا ثبوت طالب علم کے لئے مشق کے طور پر چھوڑا جاتا ہے

۱۹۔ مائل منشور کا حجم (متبادل ثبوت)

قاعدہ کے متوازی سطوح مستوی کے ایک سلسلہ سے منشور

کو مساوی فاصلوں پر کاٹ کر

چھوٹے چھوٹے ٹکڑوں میں

تقسیم کرو اور کسی دو متصل سطحوں

کے درمیان نیچے کی سطح پر ایک

قائم منشور بناؤ تب اس قسم

کی منشوری قاش کا حجم

= (اس کے قاعدہ کا رقبہ) موٹائی۔

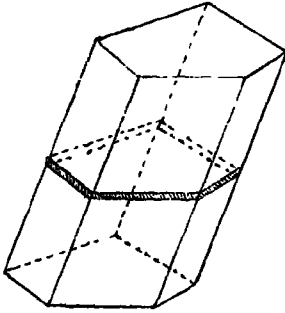
اب اگر ان قاشوں کی تعداد کو

لا انتہا بڑھا دیا جائے اور بنا برین ہر قاش کی موٹائی کو نہایت

چھوٹا کر دیا جائے تو انتہائی صورت میں کل منشور کا حجم ان

لا انتہا پتلی قاشوں کے مجموعی حجم کے مساوی ہوگا۔

لیکن چونکہ ہر قاش کا قاعدہ منشور کے قاعدہ کے مساوی



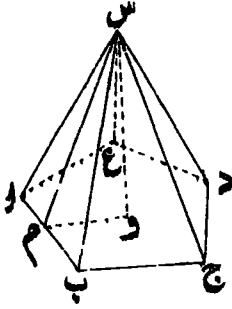
ہے اور ان سب کی موٹائی کا حاصل جمع عمودی بلندی کے برابر ہے۔ اس لئے منشور کا حجم = قاعدہ کا رقبہ \times عمودی ارتفاع فرغ۔ وہ منشور جن کے قاعدوں کے رقبے مساوی ہوں اور عمودی ارتفاع برابر ہوں ان کے حجم بھی برابر ہوتے ہیں نوٹ۔ اوپر کا ثبوت متوازی السطوح مجسموں کے لئے بھی درست ہوگا کیونکہ متوازی السطوح منشور کی ایک خاص صورت ہے، نفس ثبوت اس امر پر مبنی ہے کہ قاعدہ کے متوازی سب مستوی تراشیں ہر طرح سے ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

محزوط مضلع

۲۰۔ ایک محزوط مضلع (س، ا، ب، ج، د، ع) کی مائل سطح سب مثلثی رخوں س، ا، ب، ج، د، ع کے برابر ہوتی ہے اور عام صورت میں ہر مثلث کا رقبہ الگ الگ معلوم کرنا چاہیئے۔

لیکن اگر محزوط مضلع قائم ہو اور اس کا قاعدہ کوئی منتظم شکل ہو تو اس کی سطح مائل کے لئے ایک سادہ جملہ حاصل ہو سکتا ہے۔

۲۱۔ ایک قائم محزوط مضلع کا قاعدہ ن اضلاع کا ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے اس کی مائل سطح معلوم کرو۔ چونکہ محزوط مضلع قائم ہے اور اس کا قاعدہ منتظم ہے اس لئے اس کے مائل کنارے س، ا، ب، ج، د، ع



سب مساوی ہیں اور نیز رخ
س ا ب، س ب ج،
س ج د، ... متساوی الساقین
مثلث ہیں جو ایک دوسرے
کے ہر طرح سے برابر ہیں۔

اگر رأس س سے قاعدہ
کے ایک ضلع پر عمود س م
کھینچا جائے جو صرف یکساں
ضلع کی تنصیف کرے گا تو اس عمود

کو مخروط مضلع کا مائل ارتفاع کہتے ہیں اور اس کی قیمت ہر مائل
پہلو کی صورت میں وہی ہوتی ہے۔

اگر س سے قاعدہ پر عمود س و نکالا جائے تو فرع مسئلہ
۱۵ کے بموجب و م، ا ب پر عمود ہوگا۔

فرض کرو کہ قاعدہ کا ہر ضلع = ا، عمودی ارتفاع س و د ف
اور مائل ارتفاع س م = ل، تو مخروط مضلع کی سطح مائل

$$= \triangle س ا ب \times ن$$

$$= \frac{1}{2} ا ب \times س م \times ن$$

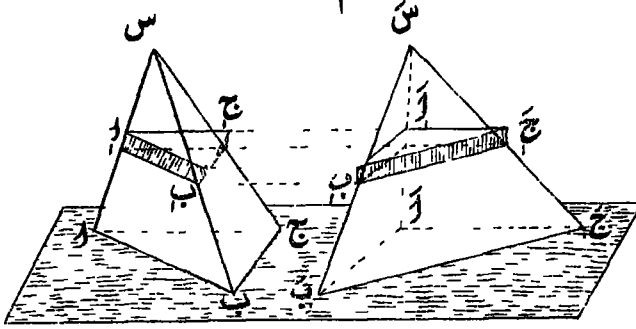
$$= \frac{1}{2} ن ا \times ل رقبہ کی اکائیاں$$

$$= \frac{1}{2} (قاعدہ کا محیط) \times (مائل ارتفاع)$$

کل سطح = سطح مائل + قاعدہ کا رقبہ

۲۲ - ثابت کرو کہ اگر دو مضلع مخروطوں (س ا ب ج)

اور (س، اَب ج) کے قاعدوں کے رقبے اور ارتفاع مساوی ہوں تو ان کے حجم بھی مساوی ہوتے ہیں۔



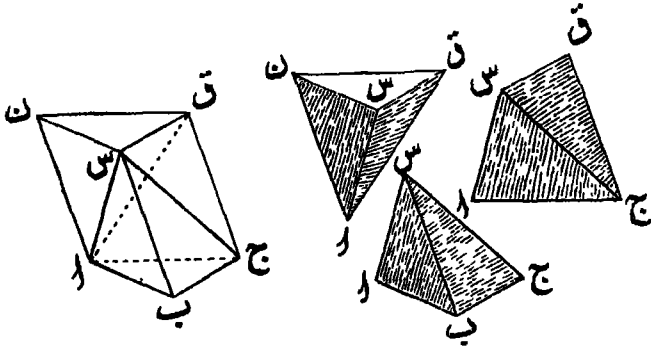
دونوں مجسموں کو اس طرح رکھو کہ ان کے قاعدے اَب ج اور اَب ج ایک ہی سطح مستوی میں ہوں اور ان کو قاعدوں کے متوازی مساوی فاصلوں پر مستوی سطحوں کے ایک سلسلہ سے قطع کر دو متصل مستوی سطحوں کے ہر زوج کے درمیان نیچے کی سطح کی تراش پر ایسے منشور بناؤ جن کے طرفی کنارے س، اَب ج کے بالترتیب متوازی ہوں۔

تب جو تراشیں دونوں مجسموں پر ایک ہی سطح مستوی کے تقاطع سے حاصل ہوں گی مثلاً اَب ج، اَب ج، ان کے رقبے ہو جب فرع دفعہ ۱۳ باہم مساوی ہونگے۔

لہذا ان تراشوں پر جو چھوٹے منشور بنائے گئے ہیں ان کے حجم بھی مساوی ہونگے کیونکہ ان کی موٹائیاں برابر ہیں۔ اب اگر ان متوازی تراشوں کی تعداد کو لا انتہا بڑھا دیا

جائے اور بنا برین ان چھوٹے منشوروں یا قاشوں کی موٹائی کو
لا انتہا کم کر دیا جائے تو دونوں مجسم اپنی قاشوں کے مجموعی حجم
کے مساوی ہونگے اور چونکہ ایک مجسم کی کوئی قاش دوسرے
مجسم کی تناظر قاش کے مساوی ہے اس لئے کل مجسم بھی بلحاظ
حجم کے ایک دوسرے کے مساوی ہونگے۔

نوٹ - اختصار کی غرض سے صرف مثلثی منشوروں پر بحث کی گئی
ہے لیکن سلاک استدلال ہر حالت میں یہی ہوگی۔
۲۳ - ایک مثلثی محزوط مضلع کا حجم معلوم کرو۔



فرض کرو کہ مثلثی محزوط مضلع (س، ا ب ج) ہے جس کا عمودی
ارتفاع ف ہے۔

۱ اور ج میں سے ب س کے متوازی خطوط کھینچو اور ان خطوط کو قاعدہ ۱ ب ج کے متوازی، س میں سے گزرنے والی سطح مستوی سے قطع کرو، اس طرح ایک مثلثی منشور بنائیگا جسکا حجم = $\triangle ۱ ب ج \times \text{ق}$

متوازی الاضلاع ۱ ج ق ن کا قطریق کھینچو۔

اب یہ منشور ایک مخروط مضلع (س، ۱ ب ج) میں جسکا قاعدہ مثلث ۱ ب ج ہے اور مخروط مضلع (س، ۱ ج ق ن) میں جسکا قاعدہ متوازی الاضلاع ۱ ج ق ن ہے منقسم ہو سکتا ہے۔ نیز موخر الذکر مخروط مضلع پھر دو مضلع مخروطوں (س، ۱ ن ق) اور (س، ۱ ج ق) میں تقسیم ہو سکتا ہے جن کے حجم باہم مساوی ہیں کیونکہ ان دونوں کے قاعدے برابر ہیں اور ان کا راس س دونوں میں مشترک ہے۔

نیز مخروط مضلع (س، ۱ ن ق) کو (۱، ن س ق) سے بھی تعبیر کیا جاسکتا ہے۔

پس مخروط مضلع (۱، ن س ق) = مخروط مضلع (س، ۱ ب ج) کیونکہ ایک مجسم کا قاعدہ ن س ق دوسرے مجسم کے قاعدہ ۱ ب ج کے برابر ہے اور دونوں کے ارتفاع بھی مساوی ہیں۔ لہذا منشور مساوی حجموں والے تین مضلع مخروطوں میں تقسیم ہو جاتا ہے۔

$$\text{مخروط مضلع (س، ۱ ب ج)} = \frac{1}{3} (\text{منشور کا حجم})$$

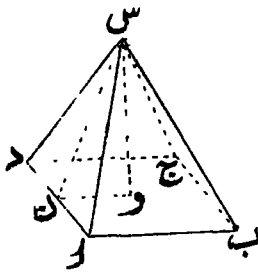
$$= \frac{1}{3} (\text{قاعدہ کا رقبہ}) \times (\text{عمودی ارتفاع})$$

فرع۔ اگر کسی مضلع مخروط کا قاعدہ ایک کثیر الاضلاع ہو تو اس کو مثلثی قاعدہ والے متعدد مضلع مخروطوں میں منقسم کر سکتے ہیں جن میں سے ہر مضلع مخروط کا ارتفاع اصلی مخروط مضلع کے ارتفاع کے برابر ہوتا ہے۔

$$\frac{1}{3} (\text{قاعدہ کا رقبہ}) \times (\text{عمودی ارتفاع}) =$$

مشقیں

۱۔ ایک قائم مخروط مضلع کی بلندی ۱۵ سنٹی میٹر ہے اور اس کا قاعدہ ایک مربع ہے جس کا ہر ضلع ۱۶ سنٹی میٹر ہے، مخروط مضلع کی (۱) سطح مائل اور (۲) حجم معلوم کرو۔



$$\text{یہاں وس} = ۱۵ \text{ سنٹی میٹر}$$

$$ا ب = د ا = ۱۶ \text{ سنٹی میٹر}$$

$$و ن = \frac{1}{4} ا ب = ۸ \text{ سنٹی میٹر}$$

\triangle س و ن میں جس کا زاویہ

س و ن قائمہ ہے

$$س ن^2 = وس^2 + و ن^2 = ۲۸۹ = ۱۵^2 + ۸^2$$

$$\therefore س ن = \sqrt{۲۸۹} = ۱۷ \text{ سنٹی میٹر}$$

$$\text{رخ س د ا کا رقبہ} = \frac{1}{4} د ا \times س ن$$

$$= \frac{1}{4} (۱۶ \times ۱۷) = ۱۳۶ \text{ مربع سنٹی میٹر}$$

$$\text{پس سطح مائل} = \triangle س د ا = ۴ \times ۱۷ = ۵۴۴ \text{ مربع سنٹی میٹر}$$

$$\begin{aligned} \text{اور حجم} &= \frac{1}{3} (\text{قاعدہ کا رقبہ}) \times \text{ارتفاع} \\ &= \frac{1}{3} (15 \times 16 \times 17) \text{ مکعب سنتی میٹر} \\ &= 1280 \text{ مکعب سنتی میٹر} \end{aligned}$$

۲۔ ایک قائم محزوط مضلع کا ارتفاع ۷ اینچ ہے اور اس کا قاعدہ ۶ اینچ کے ضلع پر ایک مربع ہے، محزوط مضلع کی سطح مائل اور حجم ایک مربع اینچ کے قریب ترین سو دیں حصہ تک معلوم کرو۔

۳۔ ذیل کے مضلع محزوطوں کے حجم دریافت کرو

(۱) محزوط مضلع کا قاعدہ ایک مستطیل ہے جس کے اضلاع

۱۱ سنتی میٹر اور ۷ سنتی میٹر ہیں اور محزوط کا ارتفاع ۱۲ سنتی میٹر ہے۔

(۲) محزوط مضلع کا قاعدہ ایک مثلث ہے جس کے اضلاع ۱۵

سنتی میٹر، ۱۴ سنتی میٹر اور ۱۳ سنتی میٹر ہیں اور بلندی ۱۰ سنتی میٹر ہے۔

۴۔ ایک قائم مضلع محزوط کا قاعدہ ۸ اینچ کے ضلع پر ایک مربع ہے

اور اس کا ارتفاع ۹ اینچ ہے، ایک اینچ کے قریب ترین سو دیں حصہ تک محزوط مضلع کا

(۱) مائل ارتفاع اور (۲) مائل کنارہ معلوم کرو۔

۵۔ ایک ایسے محزوط مضلع کی (۱) سطح مائل اور (۲) حجم دریافت

کرو جس کا قاعدہ اور ارتفاع اُس مکعب کے قاعدہ اور ارتفاع

کے برابر ہوں جو ۱۰ سنتی میٹر کے کنارہ پر بنایا جائے۔

۶۔ ایک قائم محزوط مضلع کا قاعدہ ایک مستطیل ہے جس کے

اضلاع ۲۴ سنتی میٹر اور ۱۸ سنتی میٹر ہیں اور ہر مائل کنارہ ۷ سنتی میٹر

ہے، محزوط مضلع کا حجم اور ارتفاع معلوم کرو۔

۷۔ ایک قائم محوط مصلع کا قاعدہ ایک مربع ہے جس کا ہر ضلع ۱۲ انچ ہے اور ارتفاع ۲۴ انچ ہے۔

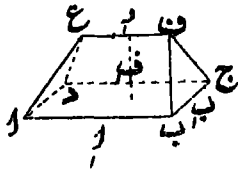
(۱) اس دو سطحی زاویہ کی جیب التمام دریافت کرو جو ہر پہلو اور قاعدہ کے درمیان بنتا ہے نیز (۲) قاعدہ پر ہر پہلو کا جو ظل ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔

۸۔ ایک قائم محوط مصلع کا قاعدہ ایک متساوی الاضلاع مثلث ہے جس کا ہر ضلع ۱۰ سنتی میٹر ہے، محوط کا ارتفاع ۵ سنتی میٹر ہے اس کے (۱) مائل ارتفاع (۲) ایک پہلو کا رقبہ (۳) اور پہلو اور قاعدہ کے دو سطحی زاویہ کی جیب التمام کو دریافت کرو۔

ایک مستوی زاویہ بناؤ جس کی جیب التمام یہی ہو اور اس کی پیمائش زاویہ کش سے کرو۔

۹۔ ایک محوط مصلع کا حجم ۲۴۰ مکعب سنتی میٹر ہے اور اس کا قاعدہ ایک منظم سدس ہے جس کا ہر ضلع ۶ سنتی میٹر ہے، محوط مصلع کا ارتفاع قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

۱۰۔ جس مجسم کی تصویر ساتھ میں دی گئی ہے اس کو فائدہ کہتے ہیں اس کا قاعدہ ایک مستطیل ہے جس کا



طول ۱۰ اور عرض ۵ ہے اور اس کے سرے دو مثلث 'د' اور 'ف' ہیں۔

باقی کے رخ 'د' 'ف' 'ب' اور 'د' 'ع' 'ج' دو منحرف ہیں جن میں مصلع 'د' 'ف' مشترک ہے اور اس لئے یہ قاعدہ کے دو ضلعوں کے متوازی

ہے، اس مضلع کو دہار بھی کہتے ہیں۔

اگر دھار ع ف = د اور ارتفاع = ف، تو ثابت کرو کہ

$$\text{فانہ کا حجم} = \frac{\text{ف} \times \text{ب} \times \{1 + 2 + 3 + \dots + \text{د}\}}{6}$$

[ع اور ف میں سے گزرنے والی مستوی سطحیں کھینچو جو قاعدہ پر عمود ہوں،

اس طرح سے فانہ ایک منشور اور دو مضلع مخروطوں میں تقسیم ہو جائیگا،

دو مضلع مخروطوں کو ملانے سے ایک مخروط مضلع بن جاتا ہے، اسکا

قاعدہ ایک مستطیل ہوگا جس کا طول ۱ - د اور عرض ب ہوگا۔

تیز منشور کے سرے انتصابی تراشیں ہیں جن میں ہر تراش کا رقبہ = $\frac{1}{2} \times \text{ب} \times \text{ف}$

اور منشور کا طول د ہے، ان امور کا لحاظ رکھتے ہوئے فانہ کا

حجم آسانی سے محبوب کیا جاسکتا ہے]

۱۱۔ اگر مشق ماقبل میں فانہ کے مثلثی رخ قاعدہ کے ساتھ

مساوی زاوے بنائیں تو ثابت کرو کہ مائل سطح، ضابطہ

$$\frac{1}{6} \times (\text{د} + 1) \times (\text{ب} + 1) \times \text{ف} + \frac{1}{6} \times (\text{د} - 1) \times (\text{ب} - 1) \times \text{ف}$$

سے حاصل ہو سکتی ہے

۱۲۔ ساتھ کی تصویر ایک منشور ناقص

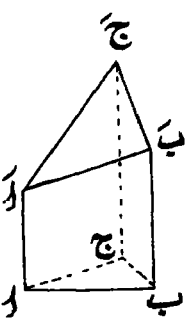
کو تعبیر کرتی ہے، منشور ناقص وہ مجسم

ہے جو ایک قائم مثلثی منشور کو سطح

مستوی ا ب ج سے قطع کرنے سے

حاصل ہوتا ہے جبکہ یہ سطح مستوی

قاعدہ ا ب ج کے متوازی نہ ہو۔



اگر طر فی کناروں ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲ کے طول ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲

ہوں تو ثابت کرو کہ منشور ناقص کا حجم

$$= \text{قاعدہ کا رقبہ} \times \frac{1}{3} (1 + 2 + 3 + \dots + n)$$

[منشور ناقص کو ایک ایسی سطح مستوی سے قطع کرو جو قاعدہ کے متوازی ہو اور طر فی کناروں میں سے سب سے چھوٹے کے ایک سرے (۱) میں سے گزرے اور اس طرح مفروضہ منشور کو ایک قائم منشور اور ایک محزوظ مطلق میں تقسیم کرو]

۱۳۔ (یور کا مسئلہ) اگر کسی کثیر السطوح میں رخوں، کناروں اور رأسوں کی تعداد کو بالترتیب x ، k ، r سے تعبیر کیا جائے تو ثابت کرو کہ $k + 2 = x + r$

فرض کرو کہ کثیر السطوح n رخوں کو یکے بعد دیگرے جوڑنے سے بنایا گیا ہے۔

اگر x صرف ایک ہو تو r اسوں اور کناروں کی تعداد مساوی ہوگی اس صورت میں $k = r$

دوسرا x شامل کرنے سے پہلے x کے ساتھ ایک کنارہ اور دو r اس مشترک ہو جاتے ہیں، یعنی نئے کناروں کی تعداد نئے r اسوں کی تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتی ہے۔

$$k = r + 1$$

تیسرا x پہلے x کے ساتھ تین r اس اور دو کنارے مشترک رکھتا ہے اور حسب سابق نئے کناروں کی تعداد نئے r اسوں کی

تعداد سے بقدر ایک کے زیادہ ہوتی ہے۔

$$\therefore \text{ک} = ۲ + ۱$$

اسی طرح بتدریج ایک ایک رخ بڑھاتے جانے سے جب ن = ۱

$$\text{رخ لگائے جائینگے تو} \quad \text{ک} = ۲ + ۱ + ۱ = ۴$$

آخری رخ کا اضافہ کرنے سے کسی نئے کنارے یا راس کا اضافہ نہیں ہوتا اور ن اور رخ برابر ہو جاتے ہیں۔

$$\therefore \text{ک} = ۲ + ۱ + ۱ = ۴$$

$$\text{یا} \quad \text{ک} + ۲ = ۲ + ۱ + ۱$$

۲۴۔ منتظم کثیر السطوح زیادہ سے زیادہ یا تیخ ہو سکتے ہیں۔ ایک مجسم زاویہ بنانے کے لئے کم از کم تین مستوی زاویوں کی ضرورت ہوتی ہے اور مسئلہ ۲۰ کی رو سے ان مستوی زاویوں کا مجموعہ ۳۶۰° سے کم ہوتا ہے، اگر کثیر السطوح منتظم ہو اور بنا برین ہر مجسم زاویہ کے احاطہ کرنے والے مستوی زاوئے سب باہم مساوی کہوں تو اس سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ ہر زاویہ ۱۲۰° سے لازماً کم ہوگا یعنی رخ یا تو متساوی الاضلاع مثلث ہونگے، یا مربع یا منتظم مخمس، کیونکہ منتظم سدس کا زاویہ ۱۲۰° ہوتا ہے اور چھ سے زیادہ اضلاع کے کثیر الاضلاع کا زاویہ ۱۲۰° سے بڑا ہوتا ہے۔

فرض کرو کہ کسی رخ کے زاویہ میں درجوں کی تعداد کو ۷ سے تعبیر

کیا جاتا ہے، اگر رخ متساوی الاضلاع مثلث ہوں تو ۹۰ = ۷

تب (۱) ۵۳ = ۱۸۰ ، (۲) ۵۴ = ۲۷۰ ، (۳) ۵۵ = ۳۰۰
[۵۶ = ۳۶۰]

پس تین، چار یا پانچ متساوی الاضلاع مثلثوں کو جوڑنے سے ایک منتظم کثیر السطوح کا ایک مجسم زاویہ بن سکتا ہے، پانچ سے زیادہ مثلثوں سے مجسم زاویہ نہیں بنے گا۔
اگر رُخ مربع ہوں تو $۹۰ = ۹۰$

تب (۴) $۲۴۰ = ۵۳$ [۳۶۰ = ۵۴]
اس صورت میں تین اور صرف تین مربع استعمال کئے جا سکتے ہیں۔

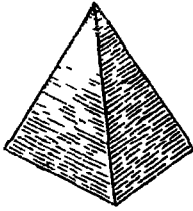
اگر رُخ منتظم مخمس ہوں تو $۱۰۸ = ۵$
تب (۵) $۳۲۴ = ۵۳$ [۴۳۲ = ۵۴]
اس صورت میں تین اور صرف تین منتظم مخمس استعمال کئے جا سکتے ہیں۔

پس پانچ اور صرف پانچ منتظم کثیر السطوح بن سکتے ہیں۔
۲۵۔ اگر ان منتظم کثیر السطوح مجسموں میں سے کسی ایک کے سب رخوں کو جو اس کی سطح پر مشتمل ہوں کھول کر ایک سطح مستوی پر بچھائیں تو ہمیں ایک مستوی شکل حاصل ہوگی جو مختلف صورتوں میں متساوی الاضلاع مثلثوں، مربعوں اور منتظم مخمسوں سے بنی ہوئی ہوگی، ایسی مستوی شکل کو اسکے کثیر السطوح کا ڈھانچہ کہتے ہیں۔

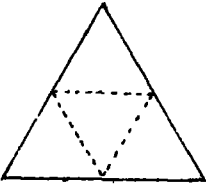
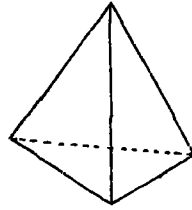
منتظم کثیر السطوح اور ان کے ڈھانچوں کی تصویریں چھوٹے پیمانہ پر صفحات ۱۰۰ تا ۱۰۲ میں دکھائی گئی ہیں۔

منتظم کثیر السطوح

(۱) وہ کثیر السطوح جس کا ہر ایک مجسم زاویہ تین متساوی الاضلاع مثلثوں کے مستوی زاویوں سے بنا ہوا ہو اس کو منتظم ذواربعۃ السطوح (یا چار سطحی) کہتے ہیں۔

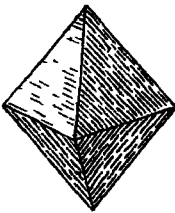


۴ رخ
۴ راس
۶ کنارے

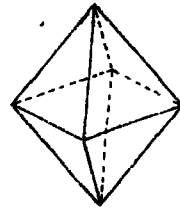


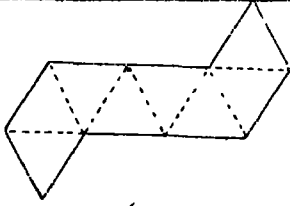
منتظم ذواربعۃ السطوح کا ڈھانچہ
چار متساوی الاضلاع مثلثوں پر مشتمل
ہوتا ہے جیسا کہ ساتھ کی شکل میں
دکھایا گیا ہے۔

(۲) وہ کثیر السطوح جس کا ہر مجسم زاویہ چار متساوی الاضلاع مثلثوں کے زاویوں سے بنا ہو اس کو ہشت سطحی کہتے ہیں



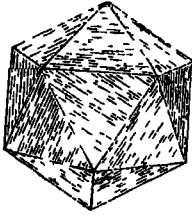
۸ رخ
۶ راس
۱۲ کنارے



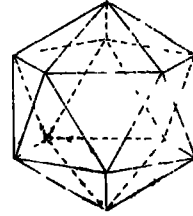


ایک منتظم ہشت سطحی کا ڈھانچہ
۸ متساوی الاضلاع مثلثوں پر مشتمل ہوتا ہے۔

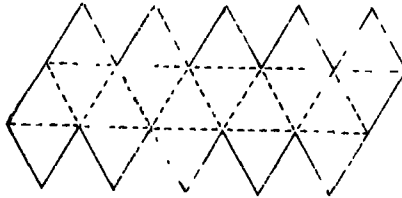
(۳) وہ کثیر السطوح جس کا ہر مجسم زاویہ پانچ متساوی الاضلاع مثلثوں کے زاویوں سے بنا ہو بست سطحی کہلاتا ہے



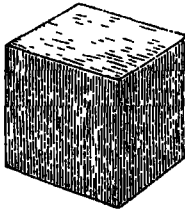
۲۰ رخ
۱۲ راس
۳۰ کنارے



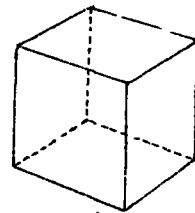
منتظم بست سطحی کا خاکہ ۲۰ مساوی متساوی الاضلاع مثلثوں پر مشتمل ہوتا ہے



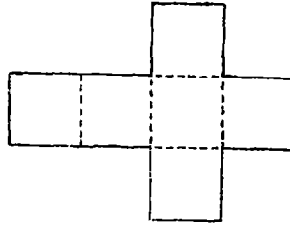
(۴) وہ منتظم کثیر السطوح جس کا ہر مجسم زاویہ تین مربعوں کے زاویوں سے بنا ہو کعب کہلاتا ہے۔



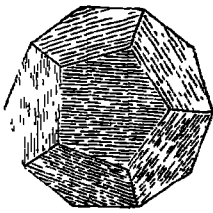
۶ رخ
۸ راس
۱۲ کنارے



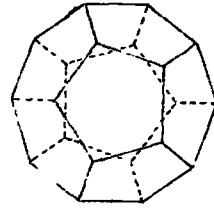
ایک مکعب کا ڈھانچہ ۶ مساوی مربعوں پر مشتمل ہوتا ہے۔



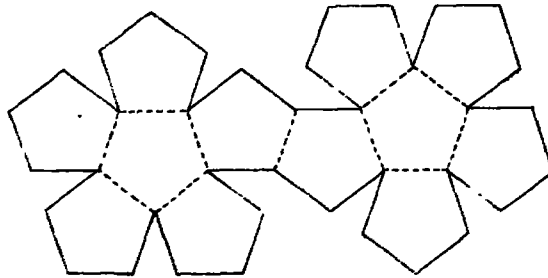
(۵) وہ کثیرالسطوح جس کا ہر مجسم زاویہ تین منتظم محسوس کے زاویوں سے بنا ہوا ہو دوازہ (بارہ) سطحی کہلاتا ہے۔



۱۲ رخ
۲۰ رأس
۳۰ کنارے



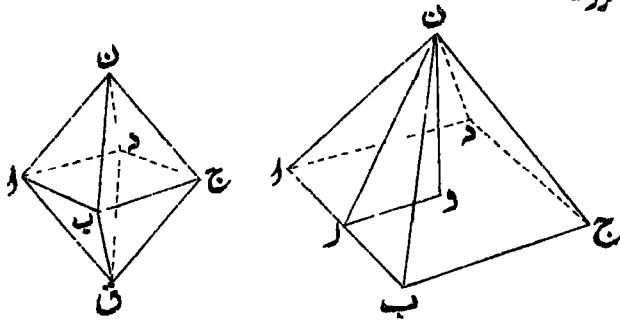
ایک منتظم دوازہ سطحی کا ڈھانچہ ۱۲ مساوی منتظم محسوس پر مشتمل ہوتا ہے



منتظم کثیرالسطوح مجسموں کے نمونے حسب ذیل طریقہ سے تیار کئے جاسکتے ہیں

سب سے پہلے مجسم کا ڈھانچہ کاغذ کے ایک موٹے تختہ پر کھینچو پھر اس ڈھانچہ کو باہر کے خطوں پر پورے طور سے کاٹو اور اندرونی خطوں پر بھی اطراف سے تھوڑا سا کاٹ لو پھر رٹوں کو اس طرح شکن دینے سے کہ کنارے ایک دوسرے کے ساتھ مل جائیں مجسم مطلوب تیار ہو جاتا ہے اور کناروں کو اس مقام پر رکھنے کے لئے گوند سے چپکا دیا جاتا ہے۔

مشق۔ ایک منتظم ہشت سطحی کا ہر کنارہ ۲ م ہے (۱) اس کے قطر کا طول (۲) اس کی سطح (۳) اس کا وسطی زاویہ (۴) اور مجسم دریافت کرو۔



شکل سے ظاہر ہے کہ ایک منتظم ہشت سطحی دو مضلع مخروطوں پر مشتمل ہوتا ہے جو مربع قاعدہ ا ب ج د کی دونوں جانب واقع ہوتے ہیں ان مضلع مخروطوں میں سے ایک بڑے پیمانے پر دائیں جانب دکھایا گیا ہے۔ ن و نقطہ ن سے قاعدہ پر عمود ہے اور مربع ا ب ج د کا وسطی نقطہ ہے، ن ر، ا ب کا عمودی منصف ہے۔

$$اب \quad ا ب = ۲ م \quad ر ب = م \quad ر و = م$$

$$ن ر = ر ب = م \quad م = م$$

قائم الزاویہ مثلث ن و ر سے

$$\text{ون}^2 = \text{ن ر}^2 - \text{ور}^2 = ۲م^۳ - ۲م^۲ = ۲م^۲$$

$$\therefore \text{ون} = \sqrt{۲م^۲}$$

$$\text{پس (۱) بہشت سطحی کا قطر} = ۲ون = ۲م^۲$$

$$\text{(۲) سطح} = ۸ \times \triangle \text{ن ا ب} = ۸ \times \text{رن} \times \text{رب}$$

$$= ۸ \times م^۲ \times م = ۸م^۳$$

$$\text{(۳) حجم} = ۲ \times (\text{اُس مخروطی مضلع کا حجم جس کا راس ن ہے})$$

$$= ۲ \times \frac{1}{3} \times \text{ون} \times \text{قاعدہ کا رقبہ}$$

$$= ۲ \times \frac{1}{3} \times م^۲ \times (۲م^۲) = \frac{۴م^۴}{۳}$$

$$\text{اور (۴) دو سطحی زاویہ} = ۲ \times \text{زاویہ ن رو}$$

$$\text{اب مس ن رو} = \frac{\text{ن و}}{\text{ور}} = \frac{۲م^۲}{م} = ۲م = ۱.۵۴۱۴۲.....$$

اس سے بذریعہ جداولِ ماس معلوم ہو سکتا ہے کہ

$$\text{ن رو} = ۵۴^{\circ} ۴۴' \text{ تقریباً}$$

$$\text{پس دو سطحی زاویہ} = ۱۰۹^{\circ} ۲۸' \text{ تقریباً}$$

کثیر السطوح مجسموں پر متفرق مثالیں

۱۔ پیمائش سے معلوم ہوا کہ ایک مستطیلی مجسم کے ابعاد ۸.۵ سنی میٹر، ۴.۷ سنی میٹر اور ۶ سنی میٹر ہیں۔ اس کا حجم دریافت کرو۔

اگر مندرجہ بالا ابعاد میں سے ہر ایک کی قیمتیں از روئے پیمائش اصلی ابعاد سے بقدر ایک ملی میٹر کے زیادہ یا کم ہوں تو کمی

یا بیشی کے لحاظ سے زیادہ سے زیادہ غلطی جو جواب میں ہو سکتی ہے اسے معلوم کرو۔ نیز دریافت کرو کہ یہ غلطیاں دونوں صورتوں میں مفروضہ حجموں کا کتنے فیصدی ہونگی۔

۲۔ لکڑی کے ۱۵ انچ چوڑے تختہ کا ایک سرا ۸ فٹ اوچی دیوار کے اوپر کے کنارے کے ساتھ لگا یا گیا ہے اور تختہ کا دوسرا سر زمین پر دیوار سے ۶ فٹ کے فاصلہ پر ہے، اگر تختہ کی موٹائی $\frac{1}{4}$ انچ ہو اور ایک مکعب فٹ لکڑی کا وزن ۵۶ پونڈ ہو تو تختہ کا وزن دریافت کرو۔

۳۔ ایک مثلث متساوی الاضلاع ا ب ج کا ہر ضلع ۱۰ سنٹی میٹر ہے، مثلث کا ظل ایک ایسی سطح مستوی پر بنایا گیا ہے جو ا ب میں سے گزرتی ہے، اگر سطح مستوی پر کے ظل کا رقبہ $۳۴\sqrt{3}$ مربع سنٹی میٹر ہو تو دونوں مستوی سطحوں کا درمیانی زاویہ معلوم کرو [دو سطحی زاویہ کی جیب اتمام محسوب کرو اور اس کے بعد جدولیں استعمال کرو یا اس کے قناطر مستوی زاویہ کی پیمائش کرو۔ $\sqrt{3} \approx 1.732$]

۴۔ ایک قائم محزوطہ مضلع کا ارتفاع ۸ سنٹی میٹر ہے اور اس کا قاعدہ ۴ سنٹی میٹر کے ضلع پر ایک منتظم سدس ہے (۱) ایک مربع سنٹی میٹر کے قریب ترین دسویں حصہ تک اس کی مائل سطح معلوم کرو اور (۲) ایک مکعب سنٹی میٹر کے قریب ترین دسویں حصہ تک اس کا حجم دریافت کرو۔

۵۔ ایک قائم محزوطہ مضلع کا قاعدہ ایک مربع ہے جس کا ہر ضلع ۶ سنٹی میٹر ہے اور اس کے مائل رخ متساوی الاضلاع مثلث

ہیں۔ مخروط مضلع کا ڈھانچہ کھینچو اور اس کے حجم اور ارتفاع کی تقریبی قیمتیں معلوم کرو۔

۷۔ ایک قائم مخروط مضلع کے قاعدہ کے کونے لفظاً (۶۹، ۵۶)، (۹۰، ۵۶)، (۹۰، ۵۶)، (۹۰، ۵۶)، (۹۰، ۵۶) ہیں اور اس کا رأس نقطہ (۱۲، ۰، ۰) پر ہے اس کی سطح مائل محسوب کرو۔ دیکھو صفحہ (۶۰—۶۲)

۸۔ ایک قائم مخروط مضلع کا قاعدہ ایک منتظم سدس ہے جس کا ہر ضلع ۵ سنتی میٹر ہے اور اس کے مائل پہلو قاعدہ کے ساتھ ۹۰ کا زاویہ بناتے ہیں، اس کا حجم دریافت کرو۔

۹۔ اگر ایک منتظم ذواربعتہ السطوح کے رأس سے اس کے قاعدہ پر عمود نکالا جائے تو ثابت کرو کہ عمود کا پایہ قاعدہ کے ہر یک وسطی کو نسبت ۱:۲ میں تقسیم کرتا ہے۔

۱۰۔ ثابت کرو کہ اگر ایک منتظم ذواربعتہ السطوح کے ایک کونہ سے مقابل کے رخ پر عمود نکالا جائے اور پھر اس عمود کے پائیں سے ایک اور عمود کسی دوسرے رخ پر نکالا جائے تو پہلا عمود دوسرے عمود کا تین گنا ہوگا۔

۱۱۔ ایک منتظم ذواربعتہ السطوح کے ایک کونے سے مقابل کے رخ پر عمود نکالا گیا ہے، اگر اس عمود کو ع سے تعبیر کیا جائے اور مجسم مذکور کا ہر ایک کنارہ ۲ م ہوگا تو ثابت کرو کہ

$$۳ ع = ۸ م$$

۱۲۔ ایک منتظم ذواربعتہ السطوح کا ہر کنارہ ۲ م ہے، ثابت کرو کہ

کل سطح = $2\pi r^2$ اور حجم = $\frac{2}{3}\pi r^3$

۱۶۔ فصنا میں تین مستقیم حظ و لا، و ب، و ج ہیں، ان میں سے ہر ایک باقی دو پر عمود ہے، اگر ان خطوں کے طوں بالترتیب ل، ب، ج ہوں تو ثابت کرو کہ

$$(۱) \text{ مخروط مضلع (و، ل، ب، ج) کا حجم} = \frac{۱}{۳} \text{ ل، ب، ج}$$

$$(۲) \text{ مثلث ل، ب، ج کا رقبہ} = \frac{۱}{۲} \text{ ل، ل، ب} + \frac{۱}{۲} \text{ ل، ب، ج} + \frac{۱}{۲} \text{ ج، ل، ب}$$

(۳) نقطہ و سے سطح مستوی ل، ب، ج پر کا عمود

$$= \frac{\text{ل، ب، ج}}{\text{ل، ل، ب} + \text{ل، ب، ج} + \text{ج، ل، ب}}$$

۱۷۔ بتاؤ کہ ایک مکعب کو ایک مستوی سے کس طرح کاٹا جائے کہ خطوط تقاطع سے ایک منتظم سدس بنے۔

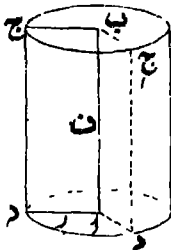
۱۸۔ ایک قائم مخروط مضلع کا قاعدہ ایک مربع ہے جس کا ہر ضلع ل، ایچ ہے اور ارتفاع ایچ ہے، مضلع کے اندر ایسا بڑے سے بڑا مکعب بنایا گیا ہے جس کا ایک رخ مخروط مضلع کے قاعدہ کی سطح مستوی میں واقع ہے، ثابت کرو کہ مکعب کا ہر کنارہ

$$= \frac{\text{ل، ف}}{\text{ل، ل} + \text{ف}}$$

گردشی مجسمات

اسطوانہ

۲۶۔ تعریف۔ قائم مستدیر اسطوانہ ایک ایسا مجسم ہے جو ایک مستطیل کو اس کے ایک ضلع کے گرد پھرنے سے حاصل ہوتا ہے جبکہ اس ضلع کو بطور محور کے ثابت رکھا جائے۔



پس اگر مستطیل ا ب ج د محور ا ب کے گرد گھومے تو مقابل کے ضلع ج د کے گھومنے

سے اسطوانہ کی منحنی سطح پیدا ہوگی (ملاحظہ ہو ساتھ کی

شکل) ضلع ج د کو جو ہمیشہ اثناء گردش میں

محور کے متوازی رہتا ہے سطح کا تنگوبینی خط کہتے ہیں چونکہ اضلاع

ا د، ب ج محور پر عمود ہیں وہ دو متوازی سطحوں میں حرکت کرتے

ہیں اور اسطوانہ کے مستدیر سروں یا قاعدوں کو مرسم کرتے ہیں۔

ظاہر ہے کہ قائم اسطوانہ کا عمودی ارتفاع اس کے محور ا ب

کا طول ہے۔

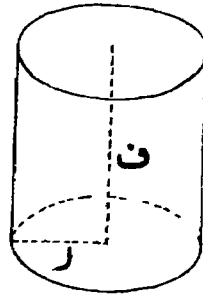
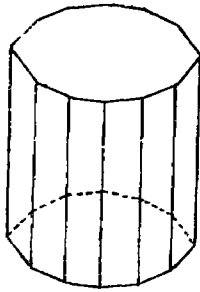
اگر ایک قائم مستدیر اسطوانہ کی مستوی تراش قاعدہ کے متوازی لی جائے

تو ظاہر ہے کہ یہ تراش ایک دائرہ ہوگی۔ نیز اگر اسطوانہ کو محور کے

متوازی کاٹا جائے تو تراش ایک مستطیل ہوگی۔

۲۷۔ بالعموم اگر ایک تکوینی خط ایک ثابت منحنی پر (جو اس سطح میں واقع نہ ہو جس پر خط مذکور واقع ہے) علی التسلل بھسلے اور اثنائے حرکت میں ہمیشہ اپنے متوازی رہے تو یہ ایک سطح مرتسم کرے گا جس کو اسطوانی سطح کہتے ہیں۔ ثابت منحنی قائم کہلاتا ہے۔ قائم مستدیر اسطوانہ کی خاص صورت میں قائم ایک دائرہ ہے جس کی سطح تکوینی خط پر عمود ہے۔ اگر اس کے خلاف ذکر نہ ہو تو کتاب کے اس حصہ میں صرف قائم مستدیر اسطوانوں پر بحث ہوگی۔

۲۸۔ اسطوانہ کی سطح اور حجم دریافت کرو



ایک قائم منشور پر غور کرو جس کا قاعدہ ایک منتظم کثیرالاضلاع ہے۔ اگر قاعدہ کی تعداد اضلاع کو لانتہا بڑھا دیا جائے تو کثیرالاضلاع بالآخر ایک دائرہ بن جائے گا اور اس صورت میں منشور کی شکل قریب قریب ایک قائم اسطوانہ ہوگی، پس اسطوانہ کو ہم ایک منشور کی انتہائی صورت

خیال کر سکتے ہیں اور اس وجہ سے اسطوانہ کی سطح اور حجم کے متعلقہ جملات منشور کے متناظر جملوں سے حاصل ہو سکتے ہیں دیکھو صفحات ۸۰، ۷۹۔

پس

(۱) اسطوانہ کی منحنی سطح = (قاعدہ کا محیط) \times ارتفاع

$$= 2\pi r \times f$$

$$= 2\pi r f \text{ رقبہ کی اکائیاں}$$

(۲) اسطوانہ کا حجم = (قاعدہ کا رقبہ) \times ارتفاع

$$= \pi r^2 \times f$$

$$= \pi r^2 f \text{ حجم کی اکائیاں}$$

نوٹ ۱۔ کل سطح = منحنی سطح + سروں کا رقبہ

$$= 2\pi r f + \pi r^2$$

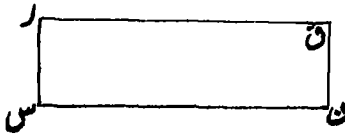
$$= \pi r (2f + r)$$

نوٹ ۲۔ ایک ایسے ماٹل اسطوانہ کا حجم جو کسی قاعدہ پر کھڑا ہو ضابطہ ذیل سے حاصل ہوگا

$$\text{حجم} = (\text{قاعدہ کا رقبہ}) \times (\text{عمودی ارتفاع})$$

ماٹل منشور کی صورت میں بھی یہی ضابطہ تھا۔

نوٹ ۳۔ اسطوانہ کی منحنی سطح کیلئے جو ضابطہ اوپر دیا گیا ہے اُس کی توضیح اس طرح ہو سکتی ہے۔



فرض کرو کہ اسطوانہ کی سطح ایک تکوینی خط $ن ق$ پر کاٹ دی گئی ہے اور پھر اس کو کھول کر ایک مستوی سطح پر بچھا دیا گیا ہے کہ ظاہر ہے کہ سطح ایک مستطیل $ن ق ر س$ کی شکل اختیار کرے گی اور اس سطح مستطیل کا طول $ن س$ اور عرض $ن ق$ بالترتیب اسطوانہ کا محیط اور ارتفاع ہوگا۔

$$\text{پس منحنی سطح} = ن س \times ن ق$$

$$= \text{محیط} \times \text{ارتفاع}$$

نوٹ ۴۔ جو منحنی سطحیں بغیر کھینچنے یا پھٹنے کے اس طرح کھل سکیں کہ مستوی شکلوں سے تعبیر ہو سکیں ان کو قابل استواء سطحیں کہتے ہیں۔

مشقیں

[جن مثالوں میں π واقع ہوتا ہے ان کے حل کرنے میں مناسب ہوگا کہ π کی جگہ اس کی عددی قیمت عین آخر تک مندرج نہ کی جائے اور ہر صورت میں π کی وہ عددی قیمت منتخب کی جائے جس سے جواب مطلوبہ درجہ صحت تک حاصل ہو]

۱۔ جن اسطوانوں کے ابعاد ذیل میں دیے ہیں ان کی منحنی سطحیں (قریب ترین مربع سنتی میٹر تک) اور حجم (قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک) دریافت کرو

$$(۱) \quad ر = ۳۵۰ \text{ سنتی میٹر، } ف = ۸۶۰ \text{ سنتی میٹر}$$

$$(۲) \quad ر = ۴۵۵ \text{ ، } ف = ۷۶۲$$

۲۔ ایک ایسے اسطوانہ کی کل سطح قریب ترین مربع سنتی میٹر تک

دریافت کرو جس کا ارتفاع ۱۵۶۸ سنتی میٹر ہو اور جس کے قاعدہ کا قطر ۸۶۴ سنتی میٹر ہو۔

۳۔ ایک قائم منشور کا قاعدہ شکل میں مربع ہے جس کا ضلع ۳۶۶ سنتی میٹر ہے، ایک اسطوانہ جس کا ارتفاع ۱۲ سنتی میٹر ہے اس منشور کے اندر عین آسکتا ہے، اسطوانہ کا حجم قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک دریافت کرو۔

۴۔ اُس نقطہ کا طریق دریافت کرو جس کا عمودی فاصلہ ایک مفروضہ محدود مستقیم خط سے مستقل ہو۔

اگر عمودی فاصلہ = ۳۵۵ سنتی میٹر، اور مفروضہ خط کا طول = ۵۶۶ سنتی میٹر، تو قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اُس سطح کا رقبہ دریافت کرو جس پر یہ نقطہ واقع ہو سکتا ہے۔

[نوٹ سنتی میٹر = سمر]

۵۔ ایک مجوف اسطوانہ کے دونوں سرے کھلے ہیں، اس کا طول ۱۲ سمر ہے بیرونی قطر ۸ سمر اور موٹائی ۲ سمر ہے، قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اس کی کل سطح دریافت کرو۔

۶۔ اسطوانہ کی شکل کا ایک ستون ہے، اس کا حجم ۱۲۸۶۲ مکعب میٹر ہے اور اس کے قاعدہ کا قطر ۴ میٹر ہے، قریب ترین سنتی میٹر تک اس کا ارتفاع معلوم کرو۔

۷۔ ایک مکعب انچ سونے سے ۱۰۰۰ اگزیلباتار بنایا گیا ہے، تار کا قطر انچ کے قریب ترین ہزارویں حصہ تک دریافت کرو۔

۸۔ ایک اسطوانہ کی منحنی سطح ۱۰۰۰ مربع سنتی میٹر ہے اور اُسکے

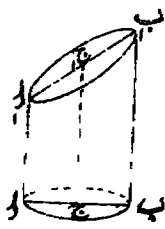
قاعدہ کا قطر ۲۰ سنتی میٹر ہے ، اسطوانہ کا حجم دریافت کرو ، نیز قریب ترین ملی میٹر تک اس کا ارتفاع معلوم کرو۔

۹۔ ایک لکڑی کا قالب قائم منشور کی شکل کا ہے ، اس کا ارتفاع $\frac{1}{4}$ فٹ ہے اور اس کے مستطیل قاعدہ کے اضلاع ۱ فٹ ۴ انچ اور ۱ فٹ ہیں ، یہ قالب اسطوانہ کی شکل کے ایک خول میں پھنس کر آتا ہے ، اگر قالب اور خول کے درمیان کی جگہ میں کنگر چونا بھرنے سے ایک ستون بنایا جائے تو قریب ترین کمب ٹک تک انگر چونے کا حجم دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک لوہے کا نل اسطوانہ کی شکل کا ہے ، اس کا طول ۱۸ میٹر ہے ، بیرونی قطر ۵۱۴ سنتی میٹر اور موٹائی ۴ ملی میٹر۔ اگر لوہے کی کثافت اضافی ۷۷۹۷ ہو تو نل کا وزن کلو گراموں میں پہلے درجہ کے قریب ترین اعشاریہ تک دریافت کرو۔

۱۱۔ ایک تانبے کا تار کو جس کا قطر ۲ ملی میٹر ہے ایک اسطوانہ کے گرد اس کی تمام سطح پر یکساں طور پر پٹا گیا ہے ، اسطوانہ کا طول ۱۲ سنتی میٹر ہے اور قطر ۱۰ سنتی میٹر ، اگر تانبے کی کثافت اضافی ۸۸۰۰ ہو تو تار کا طول اور وزن دریافت کرو۔

۱۲۔ ساتھ کی شکل میں ایک ناقص



اسطوانہ ہے جو مائل تراش سے

پیدا ہوا ہے۔ ایسا خیال کرو کہ اس جسم کو ایک ایسی مستوی سطح کاٹتی ہے جو ج میں سے گذرتی ہے

اور قاعدہ Δ ب کے متوازی ہے۔ اس طرح سے ثابت کرو کہ

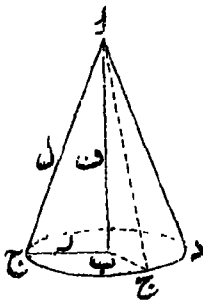
$$(۱) \text{ منحنی سطح } = ۲\pi \Delta \times \text{ج ج} = ۲\pi \Delta \times \frac{\text{ن} + \text{ن}}{۲}$$

$$(۲) \text{ حجم } = \pi \Delta \times \text{ج ج} = \pi \Delta \times \frac{\text{ن} + \text{ن}}{۲}$$

جہاں ن اور ن بالترتیب ناقص اسطوانہ کے اعظم اور اقل ارتفاعوں کو تعبیر کرتے ہیں۔

محفوظ

۲۹۔ تعریف، قائم مستدیر مخروط وہ مجسم ہے جو مثلث قائم الزاویہ کو اس کے ایک ضلع کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے، زاویہ قائمہ کے احاطہ کرنے والے اضلاع میں سے ہم کسی ایک ضلع کو محور مان سکتے ہیں۔ مثلاً اگر مثلث قائم الزاویہ Δ ب ج کے ضلع Δ ب کو محور مان کر ثابت کر دیا جائے اور مثلث کو



اس کے گرد گھمایا جائے تو وتر Δ ج کے گھومنے سے مخروط کی منحنی سطح پیدا ہوگی دیکھو شکل۔ وتر Δ ج کو جو اپنے سب مقامات میں ثابت

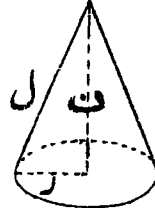
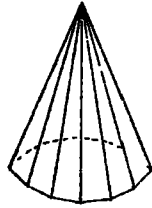
نقطہ Δ میں سے گذرتا ہے سطح کا منکوبینی نقطہ کہتے ہیں، نیز جس 'ن' کو نصف قطر Δ ج مرسم کرتا ہے اس کو مخروط کا قاعدہ کہتے ہیں۔ نقطہ Δ اس کہلاتا ہے اور زاویہ Δ ج کو (جو گھومنے والے

مثلث کے زاویہ \angle کا دو چند ہے) اسی زاویہ کہتے ہیں۔
مخروط کا ارتفاع محور \angle ب کا طول ہے اور مائل ارتفاع
وتر \angle ج ہے۔

اگر قائم مستدیر مخروط کو قاعدہ کے متوازی ایک مستوی سطح سے
کاٹا جائے تو ہر صورت میں تراش دائرہ ہوگی، نیز اگر اس مخروط
کو رأس میں سے گزرنے والی ایک مستوی سطح سے کاٹیں تو
ہر صورت میں تراش متقاطع مستقیم خطوں کا ایک زوج ہوگی۔
۳۰۔ بالعموم اگر ایک تکوینی خط اس طرح حرکت کرے کہ وہ
ایک ثابت نقطہ میں سے ہمیشہ گزرے اور اٹائے حرکت
میں ایک رہنمائی کرنے والے ثابت منحنی پر (جو اسی سطح میں
واقع نہ ہو جس پر خط مذکور واقع ہے) علی التسلسل پھسلتا جائے
تو اس طرح سے جو سطح یہ مرتسم کرے گا اس کو مخروطی سطح
کہتے ہیں۔ قائم مستدیر اسطوانہ کی صورت میں رہنمائی کرنیوالا
منحنی یعنی قائم ایک دائرہ ہے اور اگر اس دائرہ کے
مرکز میں سے ایک خط کھینچیں جو دائرہ کی سطح پر عماد
ہو تو اس خط پر کا کوئی نقطہ مخروط کا رأس ہو سکتا
ہے۔

اگر اس کے خلاف ذکر نہ ہو تو کتاب کے اس
حصہ میں صرف قائم مستدیر مخروطوں پر بحث
ہوگی۔

۳۱۔ مخروط کی سطح اور حجم دریافت کرو۔



ایک قائم مضلع مخروط پر غور کرو جس کا قاعدہ ایک منتظم کثیر الاضلاع ہے۔

اگر قاعدہ کی تعداد اضلاع کو لا انتہا بڑھایا جائے تو کثیر الاضلاع ایک دائرہ ہو جائیگا اور مخروط مضلع بالآخر ایک قائم مخروط کی شکل اختیار کر لے گا، اس لحاظ سے مخروط کی منحنی سطح اور حجم کے متعلق جو جملات مطلوب ہیں وہ مخروط مضلع کے متناظر جملات (صفحات ۸۹، ۹۳) سے حاصل ہو سکتے ہیں پس اگر مخروط کا عمودی ارتفاع 'ف' ہو، مائل ارتفاع 'ل' اور قاعدہ کا نصف قطر 'ر' تو

$$(۱) \text{ مخروط کی منحنی سطح } = \frac{۱}{۲} (\text{قاعدہ کا محیط}) \times \text{مائل ارتفاع}$$

$$= \frac{۱}{۲} \times ۲\pi r \times l$$

$$= \pi r l \text{ رقبہ کی اکائیاں}$$

چونکہ ایک مضلع مخروط کا حجم ایک ایسے منشور کے حجم کا ایک تہائی ہوتا ہے جس کا قاعدہ اور ارتفاع دونوں وہی ہوں جو منشور کے ہیں اس لئے معلوم ہوا کہ مخروط کا حجم

اس کے متناظر اسطوانہ کے حجم کا ایک تہائی ہو گا۔ پس

$$\text{مخروط کا حجم} = \frac{1}{3} (\text{قاعدہ کا رقبہ}) \times (\text{ارتفاع})$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 \times h$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

نوٹ ۱۔ کل سطح = منحنی سطح + قاعدہ کا رقبہ

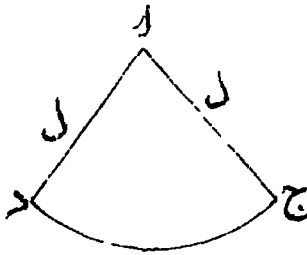
$$= \pi r l + \pi r^2$$

$$= \pi r (l + r)$$

نوٹ ۲۔ ایک ایسے ماثل مخروط کا حجم جو کسی قاعدہ پر کھڑا ہو
ماثل مضلع مخروط کے حجم کی طرح ضابطہ ذیل سے حاصل ہو سکتا
ہے،

$$\text{حجم} = \frac{1}{3} (\text{قاعدہ کا رقبہ}) \times (\text{عمودی ارتفاع})$$

نوٹ ۳۔ مخروط کی منحنی سطح کے متعلق جو ضابطہ اوپر دیا گیا ہے
اس کی توضیح اس طرح ہو سکتی ہے



فرض کرو کہ مخروط کی سطح کو مکوینی خط 'ج' پر کاٹ کر ایک
مستوی سطح پر بچھا دیا گیا ہے، ظاہر ہے کہ سطح مذکور ایک ایسے

قطاع دائرہ کی شکل اختیار کرے گی جس کا نصف قطر $\frac{1}{2} \text{ ج}$ مخروط کا ارتفاع مائل ہوگا اور جس کی قوس $\frac{1}{2} \text{ ج}$ مخروط کے قاعدہ کے محیط کے مساوی ہوگی۔

$$\text{پس منحنی سطح} = \frac{1}{2} \times \text{قوس ج} \times \text{نصف قطر ج}$$

$$= \frac{1}{2} \times \pi \times \text{ج} \times \text{ل}$$

اس سے معلوم ہوا کہ قائم مستدیر مخروط کی منحنی سطح قابل استواء ہے۔

مشقیں

۱۔ ایک قائم مستدیر مخروط کی سطح س ، حجم ح ، ارتفاع ف ، قاعدہ کا نصف قطر ر اور راسی زاویہ کا نصف عہ ہے، ذیل کے ضابطوں کو ثابت کرو

$$(۱) \text{ س} = \frac{\pi \times \text{ف} \times \text{مس عہ}}{\text{جہ عہ}} \quad \text{ح} = \frac{1}{3} \times \pi \times \text{ف} \times \text{مس عہ}$$

$$(۳) \text{ س} = \frac{\pi \times \text{ر}^2}{\text{جب عہ}} \quad \text{ح} = \frac{1}{3} \times \pi \times \text{ر}^2 \times \text{مس عہ}$$

اس لئے ثابت کرو کہ جن مخروطوں کے راسی زاوئے مساوی ہوں ان کے جھوں کو آپس میں وہی نسبت ہوتی ہے جو ان کے ارتفاعوں کے مکعبوں کو آپس میں ہو۔

۲۔ ذیل کے مخروطوں کی سطحیں قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اور حجم قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک دریافت کرو۔

(۱) $ل = ۶$ سنتی میٹر، $ل = ۱۰$ سنتی میٹر

(۲) $ل = ۱۵۲$ سنتی میٹر، $ل = ۳۵$ سنتی میٹر

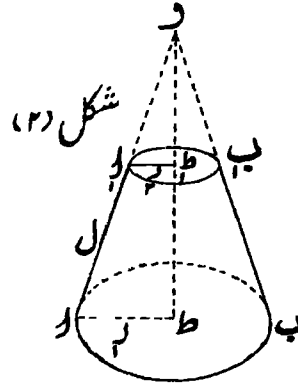
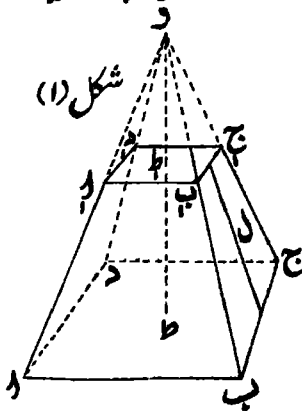
۳۔ ایک مخروط کا ارتفاع ۴۰ سنتی میٹر اور اس کے قاعدہ کا قطر ۱۸ سنتی میٹر ہے، قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اس کی کل سطح دریافت کرو۔

۴۔ ایک مخروط کا مائل ارتفاع ۵۱۱ سنتی میٹر ہے اور عمودی ارتفاع ۴۵۵ سنتی میٹر، قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک اس کا حجم دریافت کرو۔

[مخروطوں پر مزید مشقوں کے لئے دیکھو صفحہ ۱۲۷]

مخروط ناقص اور مضلع مخروط ناقص

۳۲۔ تعریف۔ اگر ایک مخروط یا مخروط مضلع کو قاعدہ کے متوازی ایک مستوی سطح سے کاٹیں تو ہر صورت میں قاعدہ اور مستوی سطح کے درمیان مجسم کا جو حصہ کٹتا ہے اس کو بالترتیب مخروط ناقص اور مضلع مخروط ناقص کہتے ہیں۔



مثلاً شکل دا میں مضلع مخروط (و، اب ج د) کا جو حصہ قاعدہ اب ج د اور متوازی تراش اب ج د کے درمیان ہے اسکو مضلع مخروط ناقص کہینگے۔

شکل (۲) میں مخروط ناقص، مخروط (و، اب) کا وہ حصہ ہے جو قاعدہ اب اور متوازی تراش اب کے درمیان ہے۔
 شکل (۱) میں اب ج د، اب ج د کو مضلع مخروط ناقص کے سرے کہتے ہیں، اسی طرح شکل ۲ میں مخروط ناقص کے سرے اب، اب ہیں۔ ہر مضلع مخروط ناقص کے سرے متشابہ شکلیں ہیں (دفعہ ۱۳، صفحہ ۷۷) مخروط ناقص کے سرے دائرے ہیں۔

مضلع مخروط ناقص کی مائل سطح منحرف شکلوں سے بنی ہوئی ہے، اگر قاعدہ اب ج د ایک منتظم شکل ہو اور مضلع مخروط قائم ہو تو یہ منحرف اشکال سب مساوی ہونگی۔
 ۳۳۔ فرض کرو کہ مضلع مخروط ناقص کے سروں میں رقبہ کی ق اور ق اکائیاں ہیں اور راس و سے سروں پر عمود نکالا گیا ہے جو ان کو بالترتیب نقاط ط اور ط پر کاٹتا ہے، تو (دفعہ ۱۳، صفحہ ۷۷) پر یہ ثابت ہو چکا ہے کہ
 ق : ق = و ط : و ط

۳۴۔ قائم مضلع مخروط ناقص کا قاعدہ ن اضلاع کا ایک منتظم کثیرالاضلاع ہے، مجسم کی مائل سطح اور حجم دریافت کرو۔

دفعہ ۳۲ کی شکل اول میں فرض کرو کہ ناقص کی موٹائی ط ط کے مساوی ہے، اور اس کے سروں کے تناظر اضلاع کے کسی زوج ب ج، ب ج کے طول ل، ل ہیں۔ نیز فرض کرو کہ ان ضلعوں کا عمودی فاصلہ ایک دوسرے سے (یعنی ناقص کی مائل موٹائی) ل ہے، اور سروں ل ب ج د، ل ب ج د کے رقبے ق، ق ہیں تو

(۱) مضلع مخروط ناقص کی مائل سطح = مخروط ب ج ب کا ن گن

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (ل + ل) \times ل \times ن \\ &= \frac{1}{2} (ن + ن) (ل + ل) ل رقبہ کی اکائیوں \\ &= \frac{1}{2} (سروں کے محیطوں کا محاصل حجم) \times مائل موٹائی \end{aligned}$$

(۲) ارتفاع و ط، و ط کو بالترتیب ف، ف سے تعبیر کرؤ تب ف - ف = ک

$$اب \frac{ق}{ف} = \frac{ق}{ف} = م \text{ جہاں } م \text{ مستقل ہے}$$

$$\therefore ق = م ف \text{ اور } ق = م ف$$

اسلئے مضلع مخروط ناقص کا حجم = مضلع مخروط (و، ل ب ج د) - مضلع مخروط (و، ل ب ج د)

$$= \frac{1}{2} ق ف - \frac{1}{2} ق ف$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} &= (\text{ف} - \text{ف}) \text{ م} \\ \frac{1}{3} &= (\text{ف} - \text{ف}) (\text{ف} + \text{ف} + \text{ف} + \text{ف}) \text{ م} \\ \frac{1}{3} &= (\text{م} + \text{ف}) \text{ م} + \text{ف} \times \text{م} + \text{ف} + \text{م} + \text{ف} \\ \frac{1}{3} &= (\text{ق} + \text{ق} + \text{ق} + \text{ق}) \text{ ک} \end{aligned}$$

۳۵۔ قائم محزوط ناقص کی منحنی سطح اور حجم دریافت کرو۔
قائم محزوط ایک ایسے قائم مضلع محزوط کی انتہائی شکل خیال کیا جا سکتا ہے، جس کا قاعدہ ایک منتظم کثیرالاضلاع ہو، اس طرح سے محزوط ناقص کی منحنی سطح اور حجم کے مستحق جو جملے مطلوب ہیں وہ مضلع محزوط ناقص (دفعہ ۳۲) کے متناظر جملوں سے حاصل ہو سکتے ہیں۔

دفعہ ۳۲ کی شکل (۲) میں فرض کرو کہ سروں ا ب اور ا ب کے نصف قطر ا ب اور ب ہیں، نیز موٹائی $\text{ط} = \text{ک}$ اور مائل موٹائی $\text{ا} = \text{ل}$
تب $\text{ق} = \pi \text{ا}$ اور $\text{ق} = \pi \text{ب}$

(۱) محزوط ناقص کی منحنی سطح $= \frac{1}{3} (\text{سروں کے محیطوں کا مجموعہ}) \times (\text{مائل موٹائی})$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{3} (\pi \text{ا} + \pi \text{ب}) \text{ل} \\ &= \pi (\text{ا} + \text{ب}) \text{ل} \text{ رقبہ کی اکائیاں} \end{aligned}$$

$$(۲) \text{محزوط ناقص کا حجم} = \frac{\text{ک}}{3} [\text{ق} + \text{ق} + \text{ق}]$$

$$= \frac{\pi}{3} [\pi r^2 + \pi r \times \pi r + \pi r^2]$$

$$= \frac{\pi}{3} [r^2 + r^2 + r^2]$$

نوٹ ۱۔ چونکہ $r + r = 2r$ اس مستطیر تراش کے نصف قطر کا دو چند جس کے عمود ہی فاصلے دونوں سے مساوی ہیں

اس لئے مخروط ناقص کی منحنی سطح $\pi r (r + r) = 2\pi r^2$ (وسطی تراش کا محیط) (مائل ہوائی) =

نوٹ ۲۔ اگر سروں کے رقبے Q_1 ، Q_2 ہوں اور وسطی تراش کا رقبہ Q ہو تو

$$\frac{\pi}{3} (r^2 + r^2 + r^2) = \text{مخروط ناقص کا حجم}$$

$$= \frac{\pi}{4} (r^2 + r^2 + r^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} (r^2 + r^2 + r^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} \left\{ r^2 + \left(\frac{r^2 + r^2}{2} \right) \right\}$$

$$= \frac{\pi}{4} (Q_1 + Q_2 + Q)$$

اس آخری نتیجہ کو ضابطہٴ منشور نما کہتے ہیں، یہ ہر ایک ایسے مجسم کی صورت میں درست ہے جس کے سرے متوازی شکلیں ہوں (ضروری نہیں کہ متشابه بھی ہوں) اور ان شکلوں کی تعداد اضلاع ایک ہی ہونے کے علاوہ ان کے متناظر اضلاع کا ہر ایک زوج متوازی ہو۔ ایسے مجسم کو منشور نما کہتے ہیں اور مخروط ناقص، مضلع مخروط ناقص اس کی خاص صورتیں ہیں۔

مشقیں

مضلع مخروط ناقص اور مخروط ناقص کے متعلق

۱۔ ایک مضلع مخروط ناقص کے سرے شکل میں مربع ہیں اور ان کے اضلاع ۵ سنتی میٹر اور ۱۵ سنتی میٹر ہیں، اگر ناقص کی موٹائی ۱۵ سنتی میٹر ہو تو اس کی مائل سطح دریافت کرو۔

۲۔ ایک مخروط ناقص کی مائل موٹائی ۵ سنتی میٹر ہے اور اس کے متدیر سروں کے قطر ۸ سمر اور ۶ سمر ہیں، اس مخروط کی منحنی سطح دریافت کرو۔

۳۔ ایک مضلع مخروط ناقص کے سرے شکل میں مربع ہیں اور ان مربعوں کے اضلاع بالترتیب ۸ سمر اور ۶ سمر ہیں، اگر ناقص کی موٹائی ۳ سمر ہو تو اس کا حجم دریافت کرو۔

۴۔ ایک مخروط ناقص کی مائل موٹائی ۵ سنتی میٹر ہے اور اس کے سروں کے نصف قطر بالترتیب ۴ سمر اور ۱ سمر ہیں، ناقص کی منحنی سطح قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اور اس کا حجم

قریب ترین کعب سنتی میٹر تک دریافت کرو۔
 ۵۔ ایک مضلع مخروط ناقص کے سرے مربع شکل کے ہیں اور ان کے اضلاع بالترتیب ۸۶۰ سمر اور ۱۶۴ سمر ہیں، اگر ناقص کی موٹائی ۵۶ سمر ہو تو قریب ترین مربع سنتی میٹر تک اس کی مائل سطح دریافت کرو۔

۶۔ ایک مضلع مخروط ناقص کے سرے مثلث شکل کے ہیں، قاعدہ کے اضلاع ۱۳ سمر، ۱۲ سمر، ۵ سمر ہیں اور چوٹی کے ۶۱۵ سمر، ۶ سمر، ۲۵ سمر، اگر ناقص کی موٹائی ۸ سمر ہو تو اس کا حجم دریافت کرو۔

۷۔ ایک مخروط ناقص کے سروں کے نصف قطر $\frac{1}{2}$ ہیں اور اس کا ارتفاع $\frac{1}{2}$ ہے، ثابت کرو کہ اس کا حجم ایک اسطوانہ اور ایک مخروط کے جموں کے حاصل جمع کے مساوی ہے جہاں اسطوانہ اور مخروط کے ارتفاع $\frac{1}{2}$ برابر ہیں اور ان کے قاعدوں کے نصف قطر بالترتیب $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$) اور $\frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$) ہیں۔
 ۸۔ ایک مخروط ناقص کے سروں کے جو نصف قطر ہیں ان کا وسط تناسب مخروط ناقص کے ارتفاع کا نصف ہے، ثابت کرو کہ مائل ارتفاع نصف قطروں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

۹۔ ایک مخروط کا ارتفاع $\frac{1}{2}$ سمر ہے، قاعدہ سے اسمر کے فاصلہ پر اسکے متوازی ایک مستوی سطح مخروط کو کاٹی ہے، معلوم کرو کہ اس طح سے جو ناقص مخروط حاصل ہوتا ہے اس کا حجم کل مخروط کے حجم کی کونسی کسر ہے۔

۱۰۔ ایک مصلع مخروط ناقص کے سرے مربع شکل کے ہیں، ناقص کی موٹائی ۶ سمر ہے اور اس کے ایک سرے کا رقبہ دوسرے سرے کے رقبہ کا چار گنا ہے، اگر اس کا حجم ۳۵۰ مکعب سنتی میٹر ہو تو سروں کے اضلاع دریافت کرو۔

مشقیں

(متفرق مثالیں مخروطوں پر)

- ۱۔ ایک مثلث ا ب ج میں $ا = ۵$ و $ب = ۶$ و $ج = ۷$ سمر اور اگر ج سے ا ب پر عمود نکالا جائے تو اس کا طول ۶ و ۱۳ سمر ہوتا ہے، اس مثلث کو مصلع ا ب کے گرد گھمانے سے جو دوہرا مخروط طے ہوتا ہے اس کا حجم قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک دریافت کرو۔
- ۲۔ دبیز کپڑے کا ایک ایسا مخروطی خیمہ بنانا مقصود ہے جس کا عمودی ارتفاع ۳۰ فٹ ہو اور جو ۱۳۸۶ مربع فٹ زمین گھیرے، اگر کپڑے کا عرض ۱ گز ہو تو قریب ترین فٹ تک دریافت کرو کہ کتنا کپڑا درکار ہوگا۔
- ۳۔ ایک مخروطی خیمہ ۸۰۰ سنتی میٹر قطر کے متدیر قاعدہ پر کھڑا ہے اور اس کے اندر ۸، ۴، ۹ مکعب میٹر ہوا ہے اس کا ارتفاع ایک میٹر کے قریب ترین دسویں حصہ تک دریافت کرو۔

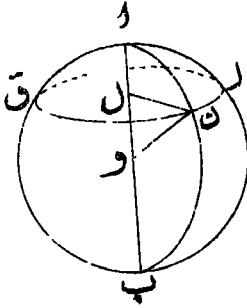
کہ اس کی گہرائی بقدر ۶۵۰ سمر کے کم ہو جائے تو قریب ترین مربع ملی میٹر تک ظرف کی اس سطح کا رقبہ دریافت کرو جو پانی کے ہٹ جانے سے خالی ہوگئی ہے۔

۹۔ ایک مخروطی ظرف دوسرے مخروطی ظرف کے اندر اس طرح رکھا گیا ہے کہ ان کے راس اور محور مشترک ہیں، مشترک راس نیچے کی طرف ہے اور مشترک محور افق پر عمود ہے۔ اندرونی ظرف کو تیل سے اور بیرونی ظرف کے باقی حصہ کو پانی سے ایک ہی ارتفاع تک بھر دیا گیا ہے۔ اگر تیل اور پانی کی سطحوں کے قطر بالترتیب ۷۵۰ سمر اور ۱۱۶۷ سمر ہوں تو تیل اور پانی کے وزنون کی باہمی نسبت دریافت کرو جبکہ تیل کی کثافت اضافی ۰۹۲ ہو۔

۱۰۔ ایک ٹھوس اسطوانہ کا طول ۱۰ سمر اور قطرہ سمر ہے، اس کے اندر ہر سرے پر ایک مخروطی جوت بنایا گیا ہے جس کا قطر ۶ سمر ہے اور ارتفاع ۴ سمر، باقی مجسم کی کل سطح قریب ترین مربع سنتی میٹر تک دریافت کرو۔

کرہ

۳۶۔ تعریف۔ کرہ وہ مجسم ہے جو نصف دائرہ کو اس کے قطر کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتا ہے جبکہ قطر کو بطور محور ثابت کر دیا جائے۔



مثلاً اگر نصف دائرہ $ا ب$ کو قطر $ا ب$ کے گرد گھمائیں تو نصف محیط $ا ب$ ایک کرہ کی سطح مرتسم کرے گا۔

نیز جب نصف محیط قطر کے گرد گھومتا ہے تو محیط پر کا ہر نقطہ مرکز $و$ سے مستقل فاصلہ پر رہتا ہے

اس لئے معلوم ہوا کہ ایک ایسے نقطہ کا طریق یا مکان جو فضا میں حرکت کرتا ہے اور اثنائے حرکت میں ایک ثابت نقطہ سے مستقل فاصلہ پر رہتا ہے ایک کرہ کی سطح ہے۔

ثابت نقطہ کو کرہ کا مرکز اور مستقل فاصلہ کو نصف قطر کہتے ہیں، قطر وہ خط مستقیم ہے جو مرکز میں سے گذرتا ہے اور دونوں طرف کرہ کی سطح پر ختم ہوتا ہے، پس سب قطر ایک دوسرے کے مساوی ہوتے۔

۳۔ کرہ کی ہر مستوی تراش دائرہ ہوتی ہے۔

شکل بالا میں فرض کرو کہ ایک سطح مستوی $ق ن ر$ کرہ کو کاٹتی ہے، اور کرہ کا مرکز $و$ ہے اور نصف قطر $ر$ ۔ نیز فرض کرو کہ خط تراش پر کوئی نقطہ $ن$ ہے۔

کاٹنے والی سطح پر عمود $و ل$ نکالو اور فرض کرو کہ اس کا طول $ط$ ہے، $و ن$ ، $ن ل$ کو ملاؤ

اب چونکہ مستوی $ق ن ر$ میں $و ل$ ، $ن ل$ پر عمود ہے

$$\therefore \text{ن ل} = \text{ون} - \text{ول}$$

$$= \text{ر} - \text{ط}$$

$$\therefore \text{ن ل} = \sqrt{\text{را} - \text{طا}} = \text{مستقل مقدار}$$

اس لئے ن کا طریق ایک دائرہ ہے جس کا مرکز ایک ثابت نقطہ

ل ہے

تعریف قطر اب کو جو مستوی تراش ق ن ل پر عمود ہے تراش کا محور کہتے ہیں اور اس کے سرے کو ب تراش قطب کہلاتے ہیں۔

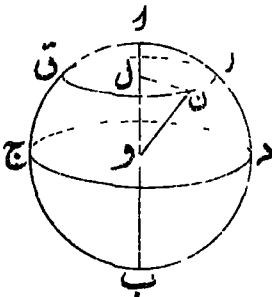
۳۸۔ اگر مستوی تراش کرہ کے

مرکز میں سے گزرے تو ل مرکز پر منطبق ہوگا اور اس صورت

میں دائرہ ق ن ل کا نصف

قطر بڑے سے بڑا ہوگا یعنی کرہ

کے نصف قطر کے مساوی ہوگا۔



جس خط پر مرکز میں سے گزرے والی مستوی تراش

کرہ کو کاٹتی ہے اس کو دائرہ کہیے کہتے ہیں، باقی سب

مستوی تراشیں صغیر دائرے کہلاتی ہیں۔

۳۹۔ ایک کرہ کا نصف قطر ل ہے، اگر اس کی ایک

مستوی تراش کا نصف قطر ل ہو اور اس تراش کا فاصلہ

مرکز سے ط ہو تو یہ ثابت ہو چکا ہے کہ

$$\text{ل} = \sqrt{\text{را} - \text{طا}}$$

پس اگر یہ مستوی تراش مرکز و سے باہر کی طرف اپنے متوازی حرکت کرے تو ط کے بڑھنے سے ل گھٹے گا پس اگر ایک کرہ کی مستوی تراش کا فاصلہ مرکز سے بڑھتا جائے تو اس تراش کا نصف قطر بتدریج گھٹتا جائے گا اور بالآخر جب ل نقطہ ل پر منطبق ہوگا، تو ل معدوم ہو جائے گا یعنی اس وقت مستوی سطح کرہ کو صرف ایک نقطہ ل پر قطع کرے گی، اس کو اس طرح بیان کرتے ہیں کہ مستوی سطح اس حالت میں نقطہ ل پر کرہ کی مماسی سطح ہے، پس معلوم ہوا کہ کرہ کی سطح کے کسی نقطہ پر صرف ایک مماسی سطح ہو سکتی ہے اور یہ وہ مستوی سطح ہوتی ہے جو نقطہ مذکور میں سے گذرنے والے نصف قطر پر عمود ہو۔

۴۰۔ اگر مماسی سطح میں اس کے نقطہ تماس میں سے ایک مستقیم خط کھینچا جائے تو وہ کرہ کی سطح کو صرف ایک نقطہ پر ملیگا، اس کو یوں بیان کرتے ہیں کہ یہ خط کرہ کو اس نقطہ پر مس کرتا ہے، پس کرہ کے کسی نقطہ پر بے شمار مماسی خط کھینچے جا سکتے ہیں اور ان میں سے ہر ایک اس نقطہ میں سے گذرنے والے نصف قطر پر عمود ہوتا ہے۔ پس اگر ایک مماسی خط کو اس کے نقطہ تماس میں سے گذرنے والے نصف قطر کے گرد گھمایا جائے تو ظاہر ہے کہ اس کے گھومنے سے مماسی سطح

پیدا ہوگی۔

۴۱۔ اگر Δ ب ایک کرہ کا قطر ہو تو ایسا دائرہ بکیر صرف ایک ہو سکتا ہے جس کا محور Δ ب ہو اور ایسے بکیر دائرے بیشمار ہو سکتے ہیں جو قطبین Δ اور ب میں سے گزریں۔
 ۴۲۔ کرہ پر کے دو مفروضہ نقطوں میں سے (جو ایک قطر کے سرے نہ ہوں) ایک اور صرف ایک بکیر دائرہ کھینچ سکتا ہے کیونکہ دائرہ کے مرکز اور ان دو نقطوں میں سے گزرنے والی مستوی سطح صرف ایک ہو سکتی ہے جو کرہ کو ایک بکیر دائرہ پر کاٹے۔

نوٹ۔ کرہ کی سطح پر کے دو نقطوں میں سے جو بکیر دائرہ گزرتا ہے اس کی چھوٹی قوس کو ان نقطوں کا کروی فاصلہ کہتے ہیں ، یہ آگے (صفحہ ۱۵۵ پر) ثابت کیا جائے گا کہ یہ قوس چھوٹے سے چھوٹا خط ہے جو ان نقطوں کے درمیان کرہ کی سطح پر کھینچا جاسکتا ہے۔ اب چونکہ کرہ کے سب بکیر دائرے مساوی ہوتے ہیں اس لئے کسی بکیر دائرہ کی ایک قوس اس زاویہ سے تعبیر ہو سکتی ہے۔ جو قوس مذکور کے محاذی مرکز پر بنتا ہے [مسئلہ اثباتی ۶۹، اسکول جو میتری]

پس شکل دفعہ ۳۸ میں نقاط ق اور ج کا کروی فاصلہ زاویہ ق و ج سے تعبیر ہو سکتا ہے اور درجوں میں ناپا جاسکتا ہے بکیر دائرہ ج د پر کے کسی نقطہ کا کروی فاصلہ قطب Δ سے ۹۰ ہے۔

۴۳۔ کرہ کی سطح پر کے کسی تین نقطوں میں سے صرف ایک دائرہ (ضروری نہیں کہ یہ کبیہ ہو) کرہ کی سطح پر کھینچ سکتا ہے کیونکہ ان تین نقطوں سے صرف ایک مستوی سطح کا تعین ہوگا جو کرہ کو ان نقطوں میں سے گزرنے والے ایک دائرہ پر کاسٹے گی۔

۴۴۔ دو نقاط مفروضہ میں سے لا انتہا کرے گزر سکتے ہیں اور ان سب کے مرکز ایک ثابت مستوی سطح پر واقع ہوتے ہیں

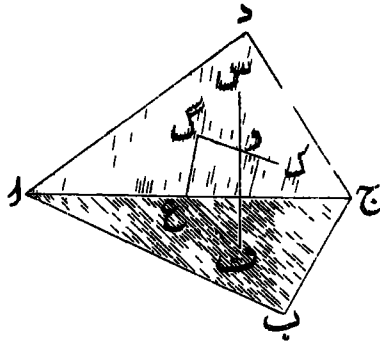
اگر قی اور ر مفروضہ نقطے ہوں تو ظاہر ہے کہ وہ سب نقطے جوقی اور ر سے تساوی الفصل ہوں ایک مستوی سطح پر واقع ہوں گے جو مستقیم خط قی کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرے گی۔ اس لئے اس سطح پر کے کسی نقطہ کو مرکز مان کر ایک کرہ کھینچ سکتا ہے جوقی اور ر میں سے گزرے۔

۴۵۔ تین نقاط مفروضہ میں سے لا انتہا کرے گزرتے ہیں اور ان کے مرکز ایک ثابت مستقیم خط پر واقع ہوتے ہیں

شکل دفعہ ۳۸ میں فرض کرو کہ تین نقطے ن، ق، ر ہیں اور ان میں سے گزرنے والے دائرہ کا مرکز ل ہے، فرض کرو کہ خط راب نقطہ ل میں سے گذرتا ہے اور ن، ق، ر کی سطح مستوی پر عمود ہے۔ اب اگر راب پر کوئی

نقطہ و لیا جائے تو یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ مثلثات $ونل$ ، $وقل$ ، $ورل$ ہر طرح سے ایک دوسرے کے برابر ہیں، اسلئے $ون = وق = ور$ پس $ارب$ پر کے کسی نقطہ کو مرکز مان کر ایک کرہ $نق$ کر میں سے کھینچ سکتا ہے، دوسرے الفاظ میں نقاط $نق$ کر میں سے بشمار کرے کھینچ سکتے ہیں اور ان کے مرکزوں کا طریق ایک مستقیم خط $ارب$ ہے جو مثلث $نق$ کر کی سطح پر عمود ہے اور اس مثلث کے بیرونی دائرہ کے مرکز میں سے گذرتا ہے۔

۴۶۔ ایسے چار نقطوں میں سے جو ایک ہی مستوی سطح پر واقع نہ ہوں صرف ایک کرہ گذر سکتا ہے۔



فرض کرو کہ چار نقطے $ارب$ ، $ج$ ، $د$ ایک ہی سطح پر واقع نہیں ہوتے اور مثلث $ارب$ ، $ج$ ، $د$ کے بیرونی دائروں کے مرکز $ف$ ، $گ$ ہیں۔

فرض کرو کہ نقاط F اور G سے مستویات ABJ اور ADJ پر بالترتیب عمود FN اور GN نکالے گئے ہیں۔

تب FN پر K کا ہر نقطہ ABJ سے مساوی ^{الفصل} ABJ سے مساوی ہے، اور GN پر K کا ہر نقطہ ADJ سے مساوی فاصلہ پر ہے، اس لئے خطوط FN اور GN میں سے ہر ایک کا ہر نقطہ ADJ سے مساوی فاصلہ پر ہے لیکن وہ سب نقطے جو ADJ سے مساوی ^{الفصل} ADJ سے مساوی ہیں ایک مستوی سطح پر واقع ہوتے ہیں جو ABJ کی زاویہ قائمہ پر تنصیف کرتی ہے۔

اس لئے FN اور GN کے دونوں اس مستوی میں واقع ہوتے ہیں اور چونکہ وہ متوازی نہیں ہو سکتے (کیونکہ وہ دو متقاطع سطوح مستویہ پر جداگانہ عمود ہیں) اس لئے وہ لازماً ایک دوسرے سے کسی نقطہ پر ملینگے۔

پس FN اور GN کا ایک ہی مشترک نقطہ و نقاط ABJ ، ADJ چاروں سے مساوی فاصلہ پر ہوگا۔ پس اگر O کو مرکز اور O کو نصف قطر مان کر ایک کرہ کھینچا جائے تو وہ ABJ ، ADJ میں سے گزریگا اور یہ ایک ہی کرہ ہے جو ان چار نقطوں میں سے

گزر سکتا ہے۔

مشقیں کرہ کے متعلق

(نظری)

۱۔ دو ہم مرکز کروں میں اندرونی کرہ کی کوئی مماسی سطح بیرونی کرہ کو ایک ایسے دائرہ پر کاٹتی ہے جس کا نصف قطر مستقل ہوتا ہے۔
 ۲۔ کرہ کی سطح پر ان سب نقطوں کا طریق دریافت کرو جو ایک نقطہ مفروضہ N سے مستقل فاصلہ پر ہوں، مختلف صورتوں میں جب N کرہ کے اندر، اوپر یا باہر ہو شکلوں کے ذریعہ اس کی توضیح کرو۔

۳۔ دو کروں کے نصف قطر r ، R ہیں اور ان کے مرکوزوں کا باہمی فاصلہ d سمجھئے، کیا شرائط ہیں کہ یہ کٹے ایک دوسرے کو (۱) مس کریں (۲) قطع کریں۔

اگر کٹے قطع کریں تو ثابت کرو کہ ان کا خط تراش ایک دائرہ کا محیط ہے۔

۴۔ ایک نقطہ بیرونی سے کرہ کے کتنے مماسی خط کھینچ سکتے ہیں؟ ان خطوں سے کیسی سطح پیدا ہوتی ہے؟ ثابت کرو کہ یہ سب خط ایک دوسرے کے برابر ہیں، نیز ان کے نقاط تماس کا طریق دریافت کرو۔

۵۔ ایک ثابت کرہ کو مستوی سطحوں سے کاٹا گیا ہے جو

سب کی سب ایک نقطہ مفروضہ میں سے گذرتی ہیں، تراشوں کے مرکوزوں کا طریق دریافت کرو۔ اُن صورتوں میں تمیز کرو جبکہ نقطہ مفروضہ ثابت کرہ کے (۱) اندر (۲) اوپر (۳) باہر واقع ہو۔

۶۔ ایک ثابت نقطہ Q کو ایک مستوی سطح کے کسی نقطہ N سے ملایا گیا ہے جو O میں سے نہیں گذرتی، اور ON پر ایک ایسا نقطہ Q لیا گیا ہے کہ $ON \times OQ =$ ایک مستقل مقدار، بتاؤ کہ Q کس سطح پر واقع ہوگا؟

۷۔ معلوم کرو کہ ایک ذواربعتہ السطوح (چهار سطحی) کے اندر ایک ایسا کرہ کس طرح بن سکتا ہے جو اس کے ہر ایک رخ کو مس کرے۔ ثابت کرو کہ ایسے کرے چار ہیں جو کسی ایک رخ اور باقی کے تین مخروجہ رنوں کو مس کریں۔

۸۔ ایک منظم ذواربعتہ السطوح کا ہر ایک کنارہ $2\sqrt{3}$ ہے، اس کے بیرونی اور اندرونی کردوں کے نصف قطر r اور R ہیں، ثابت کرو کہ

$$r = 3 = R = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

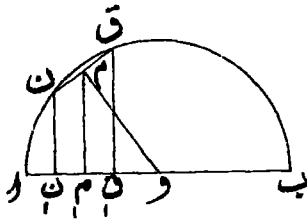
۹۔ ایک مستقیم خط کا طول دیا ہوا ہے اور اس کا محل یا مقام فضا میں ثابت کر دیا گیا ہے، اُن سب نقطوں کا طریق معلوم کرو جو ایک دی ہوئی مستوی سطح پر واقع ہوں اور جن میں سے ہر ایک پر خط مذکور کے محاذی زاویہ قائمہ بنے۔

۱۰۔ اگر ایک کرہ ایک تار کے ذواربعتہ السطوح میں اس طرح رکھا جاسکے کہ وہ جسم کے سب کناروں کو مس کرے تو ثابت کرو کہ مقابل کے کناروں کے ہر زوج کا مجموعہ ایک ہی ہے۔

۷۴۔ کرہ کی سطح دریافت کرو۔

فرض کرو کہ نصف دائرہ $ا ب$ کو قطر $ا ب$ کے گرد گھمانے سے ایک کرہ حاصل کیا گیا ہے جس کا مرکز $و$ ہے اور نصف قطرات

فرض کرو کہ ایک منتظم نصف کثیر الاضلاع (جس کی تعداد اضلاع جفت ہے) نصف دائرہ کے اندر بنایا گیا ہے اور اس کا ایک ضلع $ن ق$ ہے۔



و سے $ن ق$ پر عمود $م$ نکالو
یہ $ن ق$ کی تنصیف کرے گا۔

$ا ب$ پر عمود $ن$ ، $م$ ، $م$ ، $ق$ ، $ق$ نکالو
 $ا ب$ جیسے نصف دائرہ $ا ب$ کے گرد گھومے گا
ضلع $ن ق$ ایک مخروط ناقص کی منحنی سطح مرتسم کریگا

پس اس مخروط ناقص کی منحنی سطح = $\pi \times م \times م \times ن ق$ [صفحہ ۳۵ نوٹ ۱]

اب اگر $ن ق$ اور $ن م$ کا درمیانی زاویہ طہ ہو تو

$$ن ق = ن ق \text{ حجم طہ} = ن ق \times \frac{م}{م}$$

کیونکہ $م$ ، اور $م$ و بالترتیب $ن ق$ اور $ن ق$ پر عمود ہیں

$$م \times م \times ن ق = م \times ن ق$$

اس لئے مخروط ناقص کی منحنی سطح = $\pi \times م \times م \times ن ق$

اگر کثیر الاضلاع کی تعداد اضلاع کو لا انتہا بڑھا دیا جائے یعنی n ق کے طول کو لا انتہا کم کر دیا جائے تو اس مخروط ناقص کی سطح بالآخر کرہ کی ایک پیٹی یا منطقہ ہو جائے گی جو قوس n ق کو محور ab کے گرد گھمانے سے حاصل ہوتی ہے۔ نیز اس انتہائی صورت میں $dm = r$

∴ پیٹی کا رقبہ $= \pi r^2 \times (n \text{ ق کا ظل } ab \text{ پر})$

لیکن کرہ کی سطح اُن سب پیٹیوں کے رقبوں کا مجموعہ ہے جو متواتر اضلاع کو ab کے گرد گھمانے سے حاصل ہوں۔ اور سب اضلاع کے ظلوں کا مجموعہ $= ab = r$

اس لئے کرہ کی سطح $= \pi r^2 \times r = \pi r^3$

نوٹ۔ پیس کرہ کی سطح اسکے کبیر دائرہ کے رقبہ کی چار گنی ہوتی ہے ۴۸۔ تعریف، جو حصہ متوازی مستوی سطحیں کرہ سے کاٹتی ہیں اس کو کرہ ناقص کہتے ہیں۔ کرہ ناقص کی منحنی سطح منطقہ کہلاتی ہے۔

ایک مستوی سطح کرہ کو دو حصوں میں کاٹتی ہے، ان میں سے ہر ایک حصہ کو قطعہ کرہ کہتے ہیں، قطعہ کی منحنی سطح کو بعض اوقات ٹوپی کہتے ہیں۔



ناقص کرہ میں اگر ایک کاٹنے والی مستوی سطح $N-N$ اپنے متوازی حرکت کرے اور بالآخر کرہ کی ماسی سطح بن جائے (دفعہ ۴۵) تو اوپر کا مستدیر سرا معدوم ہو جائے گا اور ناقص کرہ ایک قطعہ کرہ بن جائے گا۔

۴۹۔ دفعہ ۴۷ کی رو سے

منطقہ کا رقبہ $= \pi r^2$ (وہ فاصلہ جو مستوی سطحوں کے درمیان ہے)

$$= \pi R^2$$

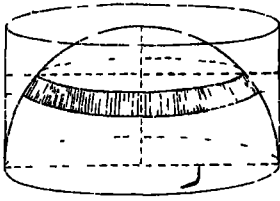
جہاں R کرہ کا نصف قطر ہے اور K کرہ ناقص کی موٹائی ہے۔

یہ نتیجہ اس صورت میں ثابت کیا گیا تھا جب موٹائی لا انتہا کم تھی، لیکن پتے منطقوں کو جمع کرنے سے یہ ضابطہ K کی تمام قیمتوں کے لئے صحیح ثابت ہو سکتا ہے۔

اسی طرح سے قطعہ کرہ کی منحنی سطح $= \pi R^2$ 'ف' جہاں R کرہ کا نصف قطر ہے اور F قطعہ کرہ کا ارتفاع ہے۔

نوٹ ۱۔ چونکہ منطقہ کا رقبہ صرف کرہ کے نصف قطر اور کرہ ناقص کی موٹائی پر موقوف ہے، اس سے معلوم ہوتا ہے کہ ایک معینہ موٹائی والے منطقہ کا رقبہ وہی ہوگا خواہ اسے کرہ کے کسی حصہ سے کٹا جائے۔

نوٹ ۲۔ ایک اسطوانہ کرہ کے گرد بنایا گیا ہے جو دائرہ کبیر پر کرہ کو مس کرتا ہے اور دو متوازی مستوی سطحیں جو اسطوانہ کے محور پر عمود ہیں ایک کرہ ناقص کاٹتی ہیں،

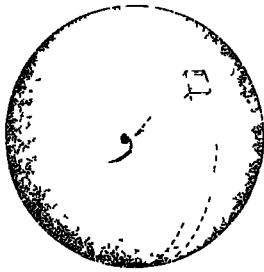


تب منطقہ کا رقبہ اُس بیٹی
کے رقبہ کے مساوی ہے جو
اسطوانہ پر اس کے بالمقابل

بنی ہے کیونکہ ہر ایک رقبہ = πr^2 رک

اس لئے کرہ کی کل سطح اس کے گرد بنے ہوئے اسطوانہ
کی منحنی سطح کے مساوی ہے۔

۵۰۔ ایک کرہ کا نصف قطر ہے اس کا حجم
دریافت کرو



کرہ کی سطح نہایت چھوٹے
حصوں یا اجزا میں تقسیم ہو سکتی
ہے دیکھو شکل۔ اگر رقبہ کے
ان اجزا کو لا انتہا چھوٹا یا کم
کر دیا جائے تو ان میں سے

ہر ایک بالآخر ایک مستوی سطح بن جائے گا۔ ایسے ہر ایک
جزو کو ہم ایک ایسے مینار یا مخروط مضلع کا قاعدہ فرض
کر سکتے ہیں جس کا رأس مرکز ہو اور جس کا ارتفاع کرہ کا
نصف قطر ہو۔

ایک ایسے مینار کا حجم = $\frac{1}{3} \pi r^2 x$ (سطح کا جزو) \times ر

لیکن ایسے کل اجزا کا مجموعہ کرہ کی کل سطح ہے۔

اور ان اجزا کے جواب میں جو مینار بنتے ہیں ان کا مجموعہ
کرہ کا حجم ہے۔

∴ کرہ کا حجم = $\frac{1}{6} \pi r^3$ (کرہ کی سطح) $\times r$

$$= \frac{1}{6} \pi r^3 \times r$$

$$= \frac{1}{6} \pi r^4$$

۵۱۔ کرہ کا نصف قطر ایک قطعہ کرہ کے کنارے پر علی التسلل حرکت کرنے سے ایک مخروطی سطح پیدا کرتا ہے، جو مجسم اس مخروطی سطح اور قطعہ کرہ کی ٹوپی سے گھرا ہوا ہے اس کو قطاع کرہ کہتے ہیں۔ [دیکھو شکل دفعہ ۵۳]

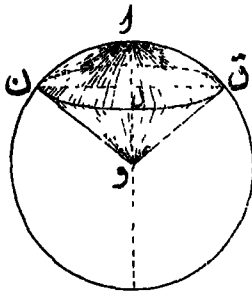
۵۲۔ دفعہ ۵۰ کے طریق عمل سے یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ قطاع کرہ کا حجم $\frac{1}{6} \pi r^3$ ہے جہاں r سے قطعہ کرہ کی ٹوپی کی سطح تعبیر ہوتی ہے۔

۵۳۔ قطعہ کرہ Q اور

کا حجم مجسم قطاع (د، ن، ق)

اور مخروط (د، ن، ق) کے

فرق کے مساوی ہے۔



فرض کرو کہ کرہ کا نصف قطر r ہے، مستدیر قاعدہ

کا نصف قطر n $= r$ اور قطعہ کرہ کا ارتفاع h $= n$

$$\text{قطعہ کا حجم} = \frac{1}{6} \pi r^3 - \frac{1}{6} \pi r^3 (r - n)$$

$$= \frac{\pi}{3} \{ ۲^۲ ر - ف (۲ - ر) \} \dots (۱)$$

لیکن $ف (۲ - ر) = ۲$ [اسکول جو میٹری مسئلہ ۵] (۲)
مطلوبہ حجم کو $ر$ اور $ف$ کی رقوم میں حاصل کرنے کیلئے
 ۲ کی قیمت جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے اس کو (۱) میں
مندرجہ کرو

اور حجم کو ۲ اور $ف$ کی رقوم میں حاصل کرنے کیلئے
 $ر$ کی قیمت جو (۲) سے حاصل ہوتی ہے اس کو (۱) میں
مندرجہ کر دہر صورت میں اختصار کرنے سے معلوم ہو گا کہ

$$\text{قطعہ کا حجم} = \frac{\pi}{۳} (۲ - ر) (۲ - ف) \dots (۳)$$

$$= \frac{\pi}{۴} (۳ + ۲ + ف) \dots (۴)$$

۵۴۔ ناقص کرہ کا حجم ایسے دو قطعوں کے فرق کے
مساوی ہے جن کے ارتفاع $ف$ اور ۲ ہوں، اور
 $ف - ۲ = ک$ جہاں $ک$ ناقص کرہ کی موٹائی ہے۔
نتیجہ (۳) استعمال کرنے اور (۲) کے ذریعہ اس کی
تحویل کرنے سے معلوم ہو گا کہ

$$\text{ناقص کرہ کا حجم} = \frac{\pi}{۴} (۳ + ۲ + ۲ + ک)$$

جہاں ۲ اور ۲ مستدیر سروں کے نصف قطر ہیں۔

مشقیں کرہ کے متعلق

(عددی)

- ۱۔ دو کروں کے نصف قطر بالترتیب (۱) ۲۶۴ سم (۲) ۱۰۶۵ سم ہیں، قریب ترین مربع سنتی میٹر تک ان کی سطحیں اور قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک ان کے حجم دریافت کرو۔
- ۲۔ ایک نصف کروی گنبد کا قطر ۱۲ میٹر ہے، ا شلنگ ۶ پنس فی مربع میٹر کے حساب سے اس پر سونا چڑھانے کی قیمت قریب ترین پنس تک دریافت کرو۔
- ۳۔ ایک ایسے کرہ کا نصف قطر دریافت کرو جس کی سطح ۲۵۰۰ سنتی میٹر قطر کے ایک دائرہ کے رقبہ کے مساوی ہے۔
- ۴۔ دھات کے ایک ٹھوس اسطوانہ کا طول ۴۵ سم ہے اور قطر ۴ سم، بتاؤ کہ کتنے ٹھوس کڑے جن کے قطر ۶ سم ہوں اس اسطوانہ سے بنائے جاسکتے ہیں۔
- ۵۔ ایک کروی خول کے اندرونی اور بیرونی نصف قطر بالترتیب ۵ سم اور ۶ سم ہیں، قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک خول کا حجم دریافت کرو۔
- ۶۔ نصف کرہ کی شکل کے ایک پیالہ کی موٹائی ۱ سم ہے، اس کا بیرونی قطر ۱۰ سم ہے، قریب ترین مکعب سنتی میٹر تک

پیالہ کا کل حجم دریافت کرو۔

۷۔ دھات کا ایک ٹھوس کرہ قطر میں ۶ سمر ہے، کرہ کو ڈھالتے سے ایک نالی بنائی گئی ہے جس کا طول ۴ سمر ہے اور بیرونی قطر ۱۰ سمر ہے، نالی کی موٹائی دریافت کرو۔

۸۔ تانبے کے ایک نصف کردی پیالہ کی موٹائی اسمر ہے اور بیرونی قطر ۱۲ سمر، اگر تانبے کے ایک مکعب سنتی میٹر تار کا وزن ۸۸ گرام ہو تو پیالہ کی کل سطح اور وزن دریافت کرو۔

۹۔ ایک کرہ کا نصف قطر ۵۳ سمر ہے، اس کو ایک ایسے عجوبہ اسطوانہ کے اندر رکھا گیا ہے جس کا نصف قطر وہی ہے جو کرہ کا اور جس کا طول اس کے محیط کے مساوی ہے، اسطوانہ کے باقی حصہ میں مکعب سنتی میٹروں کی تعداد دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک کرہ کی سطح ایک ایسے اسطوانہ کی کل سطح کے مساوی ہے جس کا ارتفاع ۱۶ سمر اور قطر ۴ سمر ہے، قریب ترین ملی میٹر تک کرہ کا نصف قطر دریافت کرو۔

۱۱۔ فرض کرو کہ پانی کے قطرے کروی شکل کے ہیں اور ہر قطرے کا قطر $\frac{1}{16}$ انچ ہے۔ بتاؤ کہ ایسے ۵۰۰ قطرے ایک مخروطی شکل کے گلاس کو جس کا ارتفاع اس کے کنارہ کے قطر کے مساوی ہے کتنی گہرائی تک بھر دیں گے؟

۱۲۔ ۶ سنتی میٹر قطر کے ایک کرہ کو اسطوانہ کی شکل کے ایک ظرف میں جو جزمہ پانی سے بھرا ہوا ہے ڈال دیا گیا ہے، ظرف کا قطر ۱۲ سمر ہے، اگر کرہ پانی کے اندر پورا ڈوب جائے تو معلوم کرو کہ

پانی کی سطح کتنا اوپر چڑھے گی۔

۱۳۔ دو کروں کے وزنوں کی نسبت ۸ : ۱۷ ہے اور ان کے ایک ایک مکعب فٹ کے وزنوں کی نسبت ۲۸۹ : ۶۴ ہے، کروں کے نصف قطروں کا مقابلہ کرو۔

۱۴۔ سیسہ کی ... ۵.۶ کروڑ گولیوں کا تقریبی وزن دریافت کرو، ہر ایک گولی کا قطر ۸ ملی میٹر ہے اور سیسہ کی کثافت اضافی ۱۱.۳۵ ہے۔

۱۵۔ تانبے کے ایک کروڑ خول کا وزن دریافت کرو جس کا بیڑنی قطر ۱۲ سمر ہے اور جس کی موٹائی ۲ سمر ہے۔ تانبے کی کثافت اضافی ۸.۸ ہے۔

۱۶۔ تانبے کی اس مقدار سے جو ۱۸ سنتی میٹر قطر کے ایک ٹھوس کرہ میں موجود ہے کتنے میٹر لمبا تار بنایا جاسکتا ہے جس کا قطر ۰.۴ ملی میٹر ہو۔

اگر تار کے قطر کو ۵ فیصد کم کر دیا جائے تو کتنے فیصد کے صاب سے اس کا طول بڑھ جائے گا؟

۱۷۔ ایک کروڑ قطعہ نصف دائرہ سے بڑا ہے اور اس کا ارتفاع ۱۸ سمر ہے اور نصف قطر ۱۳ سمر، اس کی کل سطح اور حجم دریافت کرو۔

۱۸۔ ایک کرہ ناقص کے مستوی سروں کے فاصلے مرکز کرہ سے اس کے ایک ہی جانب ۶ سمر اور ۸ سمر ہیں، اگر کرہ کا نصف قطر ۲۰ سمر ہو تو ناقص کی کل سطح اور حجم دریافت کرو۔

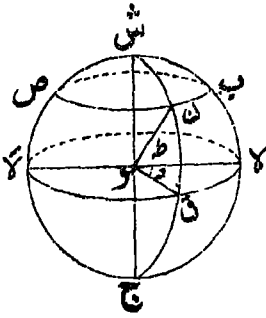
۱۹۔ ایک کروی منطقہ کے سروں کے نصف قطر ۱۲ سمر اور ۵ سمر ہیں اور منطقہ کی موٹائی ۷ سمر ہے، اس کا رقبہ دریافت کرو۔
۲۰۔ ایک کرہ جس کا قطر ۲۴ فٹ ہے ایسے رکھا گیا ہے کہ اس کے مرکز کا فاصلہ ایک شخص کی آنکھ سے ۷۳ فٹ ہے، کرہ کی سطح کے اس حصہ کا رقبہ دریافت کرو جو اس کو دکھائی دیتا ہے۔
۲۱۔ فرض کرو کہ زمین ایک کرہ ہے جس کا قطر ۸۰۰۰ میل ہے، فوٹوں میں دریافت کرو کہ تقریباً کس بلندی پر سطح زمین کا ایک دس لاکھواں حصہ دکھائی دے گا۔

۲۲۔ راب ایک ایسے دائرہ کی قوس ہے جس کا مرکز وہ ہے، ثابت کرو کہ قطاع دائرہ راب کو نصف قطر والے گرد گھمانے سے جو مجسم پیدا ہوتا ہے اس کی منحنی سطح کا رقبہ π (دائرہ راب) ہے۔

۲۳۔ نصف کرہ کے گرد مس کرتا ہوا ایک اسطوانہ بنایا گیا ہے اور اسطوانہ کے اندر ایک مخروط بنایا گیا ہے جس کا راس ایک سرے کے مرکز پر ہے اور جس کا قاعدہ دوسرا مستدیر سرا ہے، ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{اسطوانہ کا حجم}}{۳} = \frac{\text{نصف کرہ کا حجم}}{۲} = \frac{\text{مخروط کا حجم}}{۱}$$

کرہ پر حوالہ کے خطوط، عرض بلد اور طول بلد



۵۵۔ اس شکل میں کرہ کا مرکز

و ہے اور اس کے ایک قطر

ش ج کو محور مانا گیا ہے۔

دائرہ کبیر لاق لاق کو جس کا

محور ش ج ہے خط استوا

کہتے ہیں اور ش اور ج بالترتیب شمالی اور جنوبی قطب

کہلاتے ہیں۔

ش ج محور ہوگا اور ش ج قطب ہونگے ان سب

صغیر دائروں کے جن کی سطحیں خط استوا کے متوازی ہیں

فرض کرو کہ ب ن ص ایک ایسا صغیر دائرہ ہے اور اس کے

محیط پر کوئی نقطہ ن ہے۔

ش اور ج میں سے لا انتہا کبیر دائرے کھینچے جا سکتے

ہیں، فرض کرو کہ ش ن ج ایک کبیر دائرہ ہے جو ن

میں سے گزرتا ہے اور خط استوا کو ق پر کاٹتا ہے۔

اب یہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے (جیسا دفعہ ۳۴ میں)

کہ زاویہ ش و ن ان سب نقطوں کے لئے مستقل ہے جو

دائرہ صغیر ب ص کے محیط پر واقع ہوتے ہیں اس لئے

قوس ش ن ایسے سب نقطوں کے لئے مستقل ہے،

قوس ش ن کو نقطہ ن کا شمالی قطبی فاصلہ کہتے ہیں اور چونکہ زاویہ ش وق = 90° اس لئے زاویہ ن وق بھی مستقیم ہے۔
 ش ن وق کو یا اس کی قوس متناظرہ ن ق کو نقطہ ن کا عرض بلد کہتے ہیں، اور الفاظ میں اس کی تعریف یہ ہو سکتی ہے کہ عرض بلد خط استوا سے نقطہ کا کروی فاصلہ ہے۔

چھوٹے دائرہ ب ن ص کو عرض بلد کا متوازی کہتے ہیں، کیونکہ اس کے محیط پر جو نقطے ہیں ان سب کا عرض بلد ایک ہی ہے۔ شکل میں عرض بلد کو طہ سے تعبیر کیا گیا ہے۔
 بڑے دائرے جو قطبین ش اور ج میں سے گزرتے ہیں ان کے نصف محیطوں (جیسے ش ن ق ج) کو نصف النہار کہتے ہیں۔

کسی نصف النہار کا مقام بلحاظ ایک اور ثابت نصف النہار کے اُس زاویہ سے مقرر ہوتا ہے جو ان کی سطحوں کے درمیان ہو، پس اگر حوالہ کا ثابت نصف النہار ش لاج ہو تو نصف النہار ش ن ق ج کے مقام کا تعین زاویہ لا وق سے ہو سکتا ہے کیونکہ ولا اور وق خط تراش ش ج پر عمود ہیں۔
 زاویہ لا وق کو شکل میں فہ سے تعبیر کیا گیا ہے، اس کو نصف النہار ش ن ق ج کا طول بلد یا اس نصف النہار بلد کے سب نقطوں کا طول بلد کہتے ہیں۔

یہ ظاہر ہے کہ کرہ کی سطح پر کے کسی نقطہ ن کا مقام ثابت ہو جاتا ہے اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ یہ عرض بلد کے کس

مستوازی پر اور طول بلد کے کس نصف النہار پر واقع ہے یعنی اختصاراً اگر یہ معلوم ہو کہ اس کے عرض بلد اور طول بلد کیا ہیں یہ زاویہ معطیات اُن خطی محدودوں کے جواب ہیں جن کی مدد سے ایک مستوی سطح پر کے کسی نقطہ کا تعین ہو سکتا ہے

مشقیں

۱۔ ایک کرہ کو عرض بلد طہ پر ایک مستوی سطح سے کاٹا گیا ہے، اگر کرہ کا نصف قطر ہو اور مستدیر تراش کا ریماتو ثابت کر دو

$$r = R \sin \theta$$

۲۔ فرض کر دو کہ خط استوا پر زمین کا نصف قطر ۳۹۶۰ میل ہے چار ہندسوں والی جدولوں کی مدد سے تقریباً معلوم کر دو

(۱) خط استوا کا طول

(۲) خط استوا کی اُس قوس کا طول جس کے محاذی زمین کے

مرکز پر زاویہ ۱ دقیقہ (سٹ) بنتا ہے۔

(۳) عرض بلد ۵۵° پر کے متوازی کا طول

(۴) زمین کے گھومنے کے باعث لنڈن کتنے میل فی گھنٹہ

حرکت کرتا ہے۔ [لنڈن کا عرض بلد = ۵۱° ۳۰']

۳۔ عرض بلد طہ پر ایک کرہ (نصف قطر) سے ایک مستوی سطح کے ذریعہ ایک قطعہ کاٹا گیا ہے، ضوابط دفعہ ۴ اور ۵ سے متنبہ کر دو

(۱) قطعہ کرہ کی ٹوپی کی سطح = πr^2 (۱- جب طہ)

(۲) قطعہ کرہ کا حجم = $\frac{1}{6} \pi r^3$ (۱- جب طہ) (۲- جب طہ - جب طہ)

۴۔ ثابت کرو کہ ایک کر دی منطقہ کی سطح کا رقبہ جس کے مستوی سروں کے عرض بلد طہ اور طہ میں ضابطہ ۲ ۲ ۲ (جب طہ - جب طہ) سے حاصل ہوتا ہے۔

۵۔ زمین کے اوسط قطر کو ۷۹۲۲ میل مان کر چار ہندسوں والی جدولوں کی مدد سے ذیل کی سطحوں کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو

(۱) زمین کی کل سطح

(۲) منطقہ بارودہ کی سطح [دائرہ بارودہ کا عرض بلد = $\frac{1}{4}$]

(۳) منطقہ حارہ کی سطح [منطقہ حارہ کے سروں کے عرض بلد = $\frac{1}{4}$ مثلاً ۶۳° اور جنوباً]

۶۔ ایک کرہ کا نصف قطر ہے، اس کی سطح پر کے کسی نقطہ (لا، ما، ی) سے عرض اور طول بلد طہ اور فہ ہیں، ثابت کرو کہ

$$لا = رجم طہ جہ فہ$$

$$ما = رجم طہ جب فہ$$

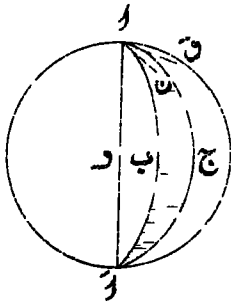
$$ی = رجم طہ$$

پچھانکوں کی منحنی سطحیں

۵۶۔ اگر دو مستوی سطحیں ایک کرہ کے مرکز میں سے گزریں تو لازماً وہ ایک دوسرے کو کرہ کے ایک قطر پر قطع کریں گی۔

اس لئے کوئی دو کبیر دائرے لازماً ایک دوسرے کو ایک قطر کے سروں پر قطع کریں گے۔

جس زاویہ پر دو کبیر دائرے ایک دوسرے کو قطع



کرتے ہیں اس کو کردھی زاویہ
کہتے ہیں - اور اس کا ناپ وہ
زاویہ ہے جو کسی ایک نقطہ
تقاطع پر دائروں کے مماسوں
کے درمیان بنتا ہے۔

پس بڑے دائروں 'ا ب د'، 'ا ج ا' کا درمیانی زاویہ
وہ ہے جو مماسات 'ا ن' اور 'ا ق' کے درمیان بنے یہ مماس
بالتربیب ان دائروں کی سطحوں میں واقع ہیں اور خط تراش
'ا د' پر عمود ہیں، اس لئے ان مماسوں کا درمیانی زاویہ، مذکورہ
مستوی سطحوں کے دو سطحی زاویہ کا ناپ ہے۔

اس لئے کروی زاویہ کا ناپ وہ دو سطحی زاویہ ہے جو
مقاطع کبیر دائروں کی سطحوں کے درمیان بنے۔

۵۷۔ تعریف - اگر دو مستوی سطحیں ایک کرہ کے قطر پر ایک
دوسرے کو قطع کریں تو ان کے درمیان کرہ کا جو مجسم حصہ
منقطع ہوتا ہے اس کو کرہ کی پھانک کہتے ہیں۔ پھانک کی
منحنی سطح کو ہلالی سطح سے بھی موسوم کرتے ہیں اس سے
ظاہر ہے کہ ہلالی سطح کو احاطہ کرنے والے خط دو کبیر
نصف دائرے ہوتے ہیں اور ان سے درمیان جو کروی
زاویہ بنتا ہے اسکو پھانک کی منحنی سطح کا زاویہ کہتے ہیں۔

۵۸۔ کرہ کی پھانک کی منحنی سطح کا رقبہ دریافت کرو۔
یہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے پھانکوں کی منحنی سطحوں کے

رقبے ان کے کروی زاویوں کے متناسب ہوتے ہیں، نیز کرہ کی کل سطح کو ایک ایسی پھانک کی منحنی سطح خیال کیا جاسکتا ہے جس کا زاویہ ۳۶۰° ہے۔

اس لئے اگر پھانک کی منحنی سطح کا زاویہ d درجے ہو تو

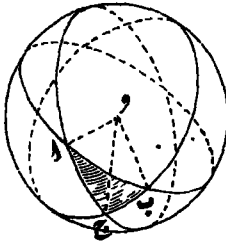
$$\text{اس کا رقبہ} = (\text{کرہ کی سطح}) \times \frac{d}{360}$$

$$= \frac{d}{90} \times 2\pi r^2$$

کروی مثلث

۵۹ - تعریف - اگر کرہ کی سطح پر ایک ایسا مثلث بنایا جائے جس کے اضلاع کبیر دائروں کی قوسیں ہوں تو اس کو کروی مثلث کہتے ہیں۔

۶۰ - اگر ایک کروی مثلث abc کے رؤسوں کو کرہ کے مرکز O سے ملایا جائے تو تین مستوی سطحیں AOB ، BOC ، COA نقطہ O پر ایک سطحی زاویہ بناتی ہیں جس کا مثلث abc سے خاص تعلق ہوتا ہے۔



مثلاً کروی مثلث abc کے اضلاع یا قوسوں

ab ، bc ، ca سے تعبیر ہو سکتے ہیں یا طرفی زاویوں

اوب، بوج، جوا سے۔
 پس معلوم ہوا کہ ایک کروی مثلث کے اضلاع اوب، بوج
 درجوں میں ناپے جا سکتے ہیں۔
 نیز کروی زاویاں، بوج کے ناپ وہی ہیں جو مجسم زاویہ
 (وا، ابج) کے دو سطحی زاویوں کے ہیں۔
 پس کروی مثلث اور سطحی زاویہ کے اس باہمی تعلق
 سے ہم یہ نتائج اخذ کرتے ہیں۔
 (۱) کروی مثلث کے کسی دواضلاع کا مجموعہ تیسرے
 ضلع سے بڑا ہوتا ہے۔

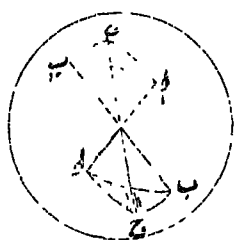
کیونکہ اب، اج کے ناپ طرئی زاوئے اوب، اوج ہیں
 اور ان زاویوں کا مجموعہ تیسرے طرئی زاویہ بوج سے جو بوج
 کا ناپ ہے بڑا ہے [مسئلہ ۱۹]
 (۲) کروی مثلث کے ضلعوں کا مجموعہ بڑے دائرہ کے
 محیط سے کم ہوتا ہے۔

کیونکہ طرئی زاویوں اوب، بوج، جوا کا مجموعہ چار
 قائموں سے کم ہے (مسئلہ ۲۰) اس لئے ان کی متناظر قوسوں کا مجموعہ چار
 ربعوں سے کم ہے۔

نوٹ۔ پہلے نتیجہ سے ظاہر ہے کہ ایک کروی کثیر الاضلاع کا کوئی
 ضلع باقی ضلعوں کے مجموعہ سے کم ہوتا ہے، اور اس لئے کرہ کی سطح
 پر دو نقطوں کے درمیان چھوٹے سے چھوٹا خط اُس کبیر دائرہ
 کی چھوٹی قوس ہے جو ان نقطوں میں سے گزرتا ہے، کیونکہ کوئی اور خط

کبیر دائروں کی نہایت ہی چھوٹی قوسوں کا مجموعہ خیال کیا جاسکتا ہے جبکہ ہر ایک قوس کو لا انتہاکم کر دیا جائے۔

۴۱۔ کردی مثلث Δ ب ج کے رأسوں میں سے ہر قطر Δ ب ب ج ج کے گزرتے ہیں وہ کرہ کی سطح کو ایک کردی مثلث Δ ب ج کے رأسوں پر ملتے ہیں، مثلث Δ ب ج کو اصلی مثلث کا متقابل یا متشاکل کہتے ہیں۔



۴۲۔ اب جس طرح سے کہ سطحی زاویوں (Δ ب ج) (Δ ب ج) کے اجزا جدا جدا مساوی ہیں لیکن یہ ایک

دوسرے پر منطبق نہیں ہو سکتے [دیکھو صفحہ (۵۱)] اسی طرح کردی مثلث Δ ب ج کے اضلاع اور زاوئے اُس کے متقابل Δ ب ج کے اضلاع اور زاویوں کے جداگانہ مساوی ہیں لیکن اپنے رخوں کی انتہاء کی وجہ سے مثلث بالعموم ایک دوسرے پر منطبق نہیں ہو سکتے۔

کیونکہ اگر ہم ہر مثلث کے محاسبہ کی طرف دیکھیں تو مثلث Δ ب ج کے رأسوں Δ ب ج کا تواتر گھڑی کی سوئیوں کی سمت میں ہے لیکن ان کے متقابل رأسوں Δ ب ج کا تواتر سوئیوں کی متقابل سمت میں ہے۔

اگر مثلث مستوی ہوں تو اس قسم کا اختلاف انطباق سے پہلے ایک مثلث کو الٹا دینے سے رفع ہو سکتا ہے، لیکن

کروی مثلثوں کو اس طرح الٹانے سے ان کے محدب رخ ایک دوسرے کے سامنے ہو جائینگے اور انطباق ناممکن ہوگا۔
نوٹ۔ ایک متساوی الساقین کروی مثلث اور اس کا متقابل ایک دوسرے پر منطبق ہو سکتے ہیں، کیونکہ فرض کرو کہ ΔABC اس لئے

$$\Delta ABC = \Delta BAC = \Delta CAB$$

پس اگر ΔABC پر رکھا جائے تو ΔBAC پر منطبق کیا جاسکتا ہے اور ΔCAB پر۔

۱۱۔ اگرچہ کروی مثلث اور اس کا متقابل ایک دوسرے پر بالعموم منطبق نہیں ہو سکتے لیکن وہ رقبہ میں ہمیشہ مساوی ہوتے ہیں۔

کیونکہ اگر مثلث ΔABC کو نہایت چھوٹے مثلثوں میں تقسیم کیا جائے تو ان میں سے ہر ایک کے مقابل کا چھوٹا مثلث، ΔBAC میں واقع ہوگا۔

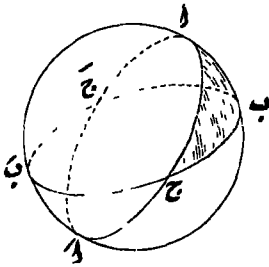
ان متقابل مثلثوں میں سے ہر ایک اگر کافی طور پر چھوٹا ہو تو مستوی خیال کیا جاسکتا ہے اس لئے یہ ایک دوسرے پر منطبق ہو سکتے ہیں۔ پس مثلث ΔABC رقبہ کے ایسے اجزاء پر مشتمل ہے جن میں سے ہر ایک کا مساوی مثلث ΔBAC میں موجود ہے۔

نوٹ۔ جس طرح ایک مستوی مثلث کے راسوں کو بیرونی دائرہ کے مرکز کے ساتھ ملانے سے اس مثلث کو تین متساوی الساقین

مثلثوں میں تقسیم کر سکتے ہیں، اسی طرح ایک کروی مثلث Δ ب ج کے رأسوں کو مستوی سطح Δ ب ج کے قطب کے ساتھ ملانے سے اس کو ہم تین متساوی الساقین کروی مثلثوں میں تقسیم کر سکتے ہیں۔ اب ہر مثلث متساوی الساقین کے مقابل ایک مساوی مثلث متساوی الساقین ہوتا ہے جو اس پر منطبق ہو سکتا ہے اور ایسے متقابل مل کر مثلث Δ ب ج کے مساوی ہیں جو Δ ب ج کا متقابل ہے۔

۶۴۔ کروی مثلث کا رقبہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ایک کروی مثلث Δ ب ج بکیر دائروں Δ ب Δ ب ج Δ ج ب کے تقاطع سے حاصل ہوتا ہے جہاں نقطے Δ ب ج بالترتیب نقاط Δ ب ج کے متقابل ہیں اور اس کا رقبہ Δ سے تعبیر ہوتا ہے۔



اب زاویہ Δ والی ہلالی سطح

$$\Delta + \Delta = \Delta \text{ ب ج}$$

$$\Delta + \Delta + \Delta = \Delta \text{ ب ج}$$

$$\Delta + \Delta + \Delta = \Delta \text{ ب ج}$$

(وقفہ ۶۴)

اس لئے جمع کرنے سے

متفرق مشقیں

(نوٹ۔ ذیل کی چند مشاہد میں عددی عمل چار ہندسوں والے لوکاریتوں کے استعمال سے آسان ہو جاتا ہے)

۱۔ ایک مکعب اور ایک کرہ حجم میں باہم مساوی ہیں، بتاؤ کہ کرہ کے نصف قطر کو مکعب کے ایک ضلع کے ساتھ کیا نسبت ہوگی؟

۲۔ ایک مکعب کا قطر ۴ و ۵ سنتی میٹر ہے، اُس کرہ کا نصف قطر دریافت کرو جس کی سطح مکعب کی سطح کے برابر ہو۔

۳۔ ایک مخروط کے قاعدہ کا رقبہ ۶۷۹ مربع سنتی میٹر ہے اور اس کی بلندی کی نسبت قاعدہ کے نصف قطر کے ساتھ ۱۱ : ۶ ہے مخروط کی سطح اور حجم دریافت کرو۔

۴۔ ایک قائم مخروط اور نصف کرہ کے کناروں کو جوڑنے سے ایک جسم تیار کیا گیا ہے، نصف کرہ کا نصف قطر ۲ فٹ ہے اور مخروط کی بلندی ۴ فٹ ہے، حجم مذکور کو پانی کے پھرے ہوئے ایک اسطوانہ کے اندر اس طرح سیدھا کر لیا گیا ہے کہ نصف کرہ اسطوانہ کے پیندے کو مس کرتا ہے، اگر اسطوانہ کے قاعدہ کا نصف قطر ۳ فٹ ہو اور بلندی ۶ فٹ تو تشریب ترین مکعب فٹ تک اُس پانی کا حجم دریافت کرو جو اسطوانہ میں باقی رہ جاتا ہے۔

۵۔ ایک کرہ کا قطر ۴ و ۳۲ سنتی میٹر ہے اور اس کا حجم ایک ایسے مخروط کے حجم کا ۶ و ۵ گنا ہے جس کی بلندی ۲ و ۷۰ سنتی میٹر ہے۔ مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

۶۔ ایک ضلع مخروط ناقص کی موٹائی ۱۵ سنتی میٹر ہے اور اس کے دونوں سرے بالترتیب ۴۰ سنتی میٹر اور ۲۴ سنتی میٹر کے اضلاع پر مربے ہیں۔ مجسم مذکور کی مائل سطح اور حجم دریافت کرو۔

۷۔ ایک مستدیر اسطوانہ کے اوپر ایک مخروط لگا کر ایک خیمہ تیار کیا گیا ہے، اس کی عمودی دیواروں کی بلندی ۳ و ۱۲۴ انچ ہے اور اس کے قاعدہ کا نصف قطر ۱۱۸ انچ ہے، خیمہ کی کل بلندی مخروط کے راس تک ۲۱۷ و ۹ انچ ہے، بتاؤ کہ اس کے اندر کتنے مکعب فٹ ہوا ہے۔

۸۔ سیہ کے ایک مخروط کی بلندی ۶ و ۲۴ سنتی میٹر ہے، مخروط کو کوٹ کر اس کا ایک ٹھوس کرہ بنایا گیا ہے جس کا قطر ۵ سنتی میٹر ہے، مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر قریب ترین ملی میٹر تک معلوم کرو۔

۹۔ ایک مساوی الاضلاع مثلث کو اس کے ایک ضلع کے گرد گھمانے سے ایک مجسمہ تیار کیا گیا ہے، اگر مثلث کے ایک ضلع کا طول ۴ و ۷ سنتی میٹر ہو تو مجسم کی سطح اور حجم دریافت کرو۔

۱۰۔ ایک کمرہ ایک اسطوانہ کی شکل کا ہے اور اس کی چھت ایک نصف کروی گنبد ہے، اندر کی طرف سے کمرہ کا قطر اتنا ہی ہے جتنا کہ فرش سے گنبد کے بالاترین نقطے کا ارتفاع ہے، اگر کمرہ کے اندر ۵۲۳ و ۶ مکعب فٹ ہوا ہو تو کمرہ کی بلندی دریافت کرو۔

۱۱۔ ثابت کرو کہ ایک کروی خول کا حجم اُس مخروط ناقص کے حجم کے مساوی ہوتا ہے جس کی بلندی خول کی موٹائی کا ۴ گنا ہو اور

جس کے مستوی سروں کے نصف قطر خول کے بیرونی اور اندرونی نصف قطروں کے مساوی ہوں۔

۱۲۔ اگر ایک مخروط کا حجم اور کل سطح بالترتیب ح اور س ہوں اور اندرونی دائرہ کی (یعنی اس دائرہ کی جو اس مخروط کے اندر بنایا جائے) سطح اور حجم بالترتیب ح' اور س' ہوں تو ثابت کرو کہ

$$ح : ح' = س : س'$$

۱۳۔ ایک اسطوانہ کے دونوں سروں پر دو نصف کرے لگائے گئے ہیں جن کے قطر اسطوانہ کے قطر کے مساوی ہیں اور اسطوانہ کا طول اس کے قطر کے مساوی ہے، اگر اس مجسم کا حجم جو اس سطح بنتا ہے ۴۴ م مکعب سنتی میٹر ہو تو اس کی سطح دریافت کرو۔

۱۴۔ پانی ایک ایسے نل میں سے گزر چکا قطر ۳۰ سنتی میٹر ہے ایک حوض میں پڑ رہا ہے، اگر پانی کی رفتار فی ثانیہ ۱۵۲۵ میٹر ہو تو بتاؤ کہ ۲ گھنٹے میں کتنے ہزار میٹر پانی حوض میں پڑیگا۔

۱۵۔ اسطوانہ کی شکل کے ایک برتن کی گہرائی ۶۴ سنتی میٹر ہے اور اندر کی طرف سے اس کا قطر ۸ سنتی میٹر ہے، اس کو بھرنے کے لئے جبکہ رپارہ درکار ہوگا اس کا وزن چار عددوں والی جدوہوں کی مدد سے کلوگراموں میں معلوم کرو جبکہ پارہ کی کثافت اصنافی ۱۳۵۶ ہو۔

۱۶۔ اگر ایک کرہ کے قطر کو ناپنے میں دونوں طرف اصلی قطر کا ایک فیصد غلطی واقع ہو تو بتاؤ کہ محسوبہ حجم اصلی حجم سے کتنے فیصد زیادہ ہوگا۔

۱۷۔ چار ہندسوں والی جدولوں کے ذریعہ جہاں تک ممکن ہو ٹھیک ٹھیک معلوم کرو کہ تانبے کے ۵۹۳ کلوگراموں سے ۵۴.۵ ملی میٹر قطر کا کتنے میٹر لمبا تار کھینچ سکتا ہے، جبکہ تانبے کی کثافت اضافی ۸۸۵۸۷۰۔

۱۸۔ چار ہندسوں والی جدولوں کے ذریعہ دریافت کرو کہ ۱۰۵۴ کلوگرام سیسہ سے ۳۵.۶ ملی میٹر قطر کے تقریباً کتنے چھڑے بن سکتے ہیں۔ سیسہ کی کثافت اضافی ۱۱۵۳۵ ہے۔

۱۹۔ اگر ایک مخروط ناقص کی بلندی ف ہو اور اس کے دونوں سروں کے رقبے بالترتیب ۱ اور ۲ ہوں تو مخروط ناقص کا حجم ضابطہ

$$ح = \frac{\pi}{3} (1 + \sqrt{1} + 2) (ب + ۱)$$

سے محسوب ہوتا ہے۔ اگر

ف = ۴۵ اینچ ۱ = ۲۸.۵ مربع اینچ، ب = ۶ = ۸۵ مربع اینچ
تو حجم قریب ترین مکعب اینچ تک معلوم کرو۔

یہ ضابطہ ذیل کی صورتوں میں کیا ہو جائے گا جب (۱) = ب

اور (۲) = ۱، ان دونوں صورتوں کی ہندسی تعبیر کیا ہوگی؟

۲۰۔ ایک انجن کے جوش دان میں ۳۵۰ نیلیاں ہیں جن میں سے ہر ایک کا

قطر اندر کی طرف سے ۲.۵ اینچ ہے اور ہر ایک کا طول ۸ فٹ ہے، گرم کرنے

والی مجموعی سطح (یعنی اندر کی طرف سے نیلیوں کی منحنی سطح) مربع

فٹوں میں قریب ترین صحیح عدد تک معلوم کرو۔

۲۱۔ ایک قائم مستدیر مخروط کی پیمائش کرنے سے معلوم ہوا کہ اس کے قاعدہ کا قطر ۴۵۳ اور ۱۶ کے درمیان ہے اور اس کی بلندی ۵۵۳ اور ۴۷ کے درمیان ہے، اگر ۱۱ کی قیمت ۱۴۱۶/۳ لی جائے تو (۱) بڑے ابعاد کی بنا پر اور (۲) چھوٹے ابعاد کی بنا پر مخروط کا حجم محسوب کرو، اگر جواب اعتدالیہ کے سات لمخوط ہندسوں تک نکالا جائے تو بتاؤ کہ ان میں سے کتنے عدد بیکار ہیں۔

۲۲۔ وہات کے ایک کعب کو جس کا ہر کنارہ ۳۶۵ سنتی میٹر ہے بگلا کر ایک کرہ تیار کیا گیا ہے، چار ہندسوں والی جدولوں سے جہاں تک ممکن ہو سکے کرہ کا قطر صحیح صحیح محسوب کرو۔

۲۳۔ دو کروں کے وزن ۸ : ۱۱ کی نسبت میں ہیں اور ان کی اصنافی کثافتیں بالترتیب ۱۵۲۱ اور ۵۶۰ ہیں، اگر پہلے کرہ کا قطر ۵۵۴ سنتی میٹر ہو تو دوسرے کرہ کا قطر دریافت کرو۔

۲۴۔ ایک قائم مستدیر مخروط کو قاعدہ کے متوازی دو مستوی سطحیں کاٹتی ہیں اور اس کے ارتفاع کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہیں، ان ٹکڑوں کے حجموں کا مقابلہ کرو۔

۲۵۔ اگر زمین کو ۷۹۲۶ میل قطر کا ایک کرہ تسلیم کیا جائے تو چار ہندسوں والی جدولوں سے خط بارود شمالی (عرض بلد ۳۳°۴۶) کا طول جہاں تک ممکن ہو صحیح صحیح دریافت کرو۔

سینز آف منطلقہ کا رقبہ دریافت کرو جو عرض بلد ۶۰ اور عرض بلد ۹۰ کے درمیان واقع ہوتا ہے۔

۲۶ — ایک کرہ کا قطر ۳۷۶۲ پانچ ہے چار ہندسوں والی جدولوں سے اس طے سے بڑے مکعب کا حجم جہاں تک ممکن ہو صحیح صحیح محسوب کرو جو اس میں سے کاٹا جاسکتا ہے۔

۲۷ — ایک مکعب حوض جس کا ہر کنارہ اندر کی طرف سے ۶ فٹ ہے پانی سے بھرا ہوا ہے، اس پانی کے حجم کا ۰.۴ حصہ ہر روز تبخیر سے ضائع ہو جاتا ہے۔ اگر یہ تسلیم کر لیا جائے کہ پانی کی کمی صرف تبخیر کی وجہ سے ہوتی ہے تو بتاؤ کہ ۱۰ دن کے بعد کتنے ادس پانی حوض میں رہ جائے گا۔

۲۸ — سیسہ کے ایک منتظم ذوار بعتہ اسطوح کا وزن ۱۰۵۷۰ کلو گرام ہے اور سیسے کی کثافت اضافی ۳۵ ہے، چار ہندسوں والی جدولوں سے اس کے کنارہ کا طول جہاں تک ممکن ہو سکے صحیح صحیح معلوم کرو۔

۲۹ — ذیل کے گردشیں مجسموں کو اسطوانوں، مخروطوں یا ناقص مخروطوں کا مجموعہ یا فرق سمجھ کر ان میں سے ہر ایک کا حجم دریافت کرو۔ وہ مجسم جس کی تکوین (۱) ایک متساوی الاضلاع مثلث (ضلع = ۱) کو اس کے ایک ضلع کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے۔

(۲) ایک متساوی الاضلاع مثلث (ضلع = ۱) کو ایک ایسے خط کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے جو اس کے رأس میں سے قاعدہ کے متوازی کھینچا جائے۔

(۳) ایک مربع (ضلع = ۱) کو ایک ایسے خط کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے جو مربع کے ایک کونہ میں سے گزرے اور اسکے ایک قطر

کے متوازی ہو۔

(۴) ایک منتظم سدس (ضلع = ۱) کو ایک ضلع کے گرد گھمائے سے ہوتی ہے۔

ثابت کرو کہ ہر صورت میں حجم اُس منشور کے حجم کے مساوی ہے جسکا قاعدہ گردش کرنیوالی شکل ہو اور جس کی بلند می اُس دائرہ کا محیط ہو جس کو گردش کرنیوالی شکل کا ہندسی مرکز مرسم کرتا ہے۔

۳۰۔ مندرجہ بالا مشق کے آخر میں جو اصول درج ہے اس کو تسلیم کر کے ایک مجسم حلقے کا وزن دریافت کرو جو $\frac{1}{2}$ انچ نصف قطر کے دائرہ کو ایک ایسے خط کے گرد گھمائے سے حاصل ہو جسکا فاصلہ دائرہ کے مرکز سے ۱ انچ ہے۔



عددی مشقوں کے جوابات

[ترسیمی عمل میں انتہا درجہ کی احتیاط سے بھی کلیتہً درست نتائج حاصل نہیں ہو سکتے۔ ایسی صورتوں میں جوابات محض تقریبی ہوتے ہیں جو جوابات ذیل میں مندرج ہیں وہ نظری طریق پر محسوب کئے گئے ہیں، لہذا ان کو معیار سمجھ کر طالب علم اپنے نقشہ اور پیمائش کی صحت جانچ لے، اگر مندرجہ ذیل جوابات کے لحاظ سے غلطی ایک فیصد کے اندر ہو تو طالب علم اپنے جوابات کو تسلی بخش سمجھے۔]

مشقیں صفحہ (۱۳)

۴۔ ۷۰۔۷۰ سنتی میٹر ۵۔ ۳۰۔۳۰ انچ ۲۵۰۔۲۵۰ انچ

۶۔ (۲) ۴۲۰۴۲ سنتی میٹر (۳) ۵۶۵۶۵۶ سنتی میٹر

مشقیں صفحہ (۲۳)

۲۔ ۵۰۔۵۰ انچ ۴۔ ۳۲۲۰۰

مشقیں صفحہ (۲۶)

۴۔ ۱۰۵۴۰۰۰ سنتی میٹر ۵۔ ۳۵۰۰۰ سنتی میٹر ۱۰۵۲۰۰۰ سنتی میٹر

۵۳۸۵ ۵۳۳۹

مشقیں صفحہ (۴۷)

۴۔ (۱) ۵۸۰۰۰

(۲) ۵۸۵۷۱

۵۔ ۵۲۸۰۰۰

مشقیں صفحہ (۶۲)

۲ - ۳، ۴، ۵، ۳ - ۱۳

مشقیں صفحہ (۶۳)

۱ - ۲ مربع فٹ ۲ - ۱۰ سنٹی میٹر، ۱۵/۱۲، ۲۸، ۴۴، ۱۴۴ مربع سنٹی میٹر

۶ - ۱۰ سنٹی میٹر، ۵۵، ۵۴، ۵۵ مربع سنٹی میٹر

مشقیں صفحہ (۶۸)

۱ - ۲۵، ۵۰، ۲۵۰ لیٹر، ۵۲۰ کلوگرام ۳ - ۶۵ لاکھ

۴ - ۱۸۸ کلوگرام - مشقیں صفحہ (۸۰)

۱ - ۱۹۶۵۳ ۲ - ۲۰۲۰۰ کلوگرام

۳ - ۴، ۸۸، ۴۴ کلوگرام ۴ - ۵۴۲۵

۵ - ۸ شلنگ ۴ پنس ۶ - ۲۱، ۴۲، ۲۱ کلوگرام

۷ - ۵ شلنگ ۱۱ پنس ۸ - ۶۵ سنٹی میٹر، ۶۵ سنٹی میٹر

۹ - ۱ سنٹی میٹر ۱۰ - ۱۲ سنٹی میٹر، ۱۵ سنٹی میٹر، ۱۸ سنٹی میٹر

۱۱ - ۱ سنٹی میٹر، ۶ سنٹی میٹر، ۵ سنٹی میٹر

۱۲ - ۵، ۸ سنٹی میٹر، ۲۰۰ مربع سنٹی میٹر، ۱۹۴۴ مکعب سنٹی میٹر

۱۳ - ۱۲ سنٹی میٹر، ۴ سنٹی میٹر ۱۴ - ۲۹ سنٹی میٹر

۱۵ - ۱۴، ۴۴، ۱۴ ۱۶ - ۲۰ مکعب سنٹی میٹر، ۴۸۰ مربع سنٹی میٹر

۱۷ - ۳۴۰ مکعب سنٹی میٹر، ۴۳۲ مربع سنٹی میٹر

۱۸ - ۱۲۰۰ مکعب سنٹی میٹر ۱۹ - ۴، ۶ مکعب فٹ

۲۰ - ۳۴۵۰۰ گیلن، ۱۶۶ گیلن ۲۱ - ۲۳، ۶۶۱

۲۲ - ۶۵ گھنٹے ۱/۴ منٹ

۲۳ - (۱) ۴:۳ (۲) ۱۰۰۰' ۷۱۷

۲۴ - ۴۵۹ دن

مشقیں صفحہ (۹۳)

۲ - (۱) ۹۱۳۸ مربع اینچ (۲) ۸۴ مکعب اینچ

۳ - (۱) ۳۰۸ مکعب سنتی میٹر (۲) ۲۸۰ مکعب سنتی میٹر

۴ - (۱) ۹۵۸۵ اینچ (۲) ۱۰۵۶۳ اینچ

۵ - (۱) ۲۲۳۵۶ مربع سنتی میٹر (۲) ۳۳۳۵۳ مکعب سنتی میٹر

۶ - ۸ سنتی میٹر، ۱۱۵۲ مکعب سنتی میٹر

۷ - (۱) ۰.۵۲۸ (۲) ۰.۵۴۹ مربع اینچ

۸ - (۱) ۵۵۸ سنتی میٹر (۲) ۲۸۵۸۷ مربع سنتی میٹر

(۳) $\frac{1}{4}$ ، ۹۰

۹ - ۸۵۷ سنتی میٹر

مشقیں صفحہ (۱۰۴)

۱ - ۳۷۷۴۴ مکعب سنتی میٹر، ۱۵۵۶۱۲، ۱۶۵۰۵۰

۴۵۳۱ فیصد، ۴۵۰۸ فیصد

۲ - $\frac{1}{4}$ پونڈ ۳۶ - ۵۲

۳ - (۱) ۱۰۴۵۶ مربع سنتی میٹر (۲) ۱۱۰۵۸ مکعب سنتی میٹر

۵ - ۴۵۲ سنتی میٹر، ۵۰۵۹ مکعب سنتی میٹر

۶ - ۳۸۴ رقبہ کی اکائیاں ۷ - ۱۶۲۵۳ مکعب سنتی میٹر ۱۲ - ۲۰ - ۳۲

مشقیں صفحہ (۱۱۱)

۱ - (۱) ۱۵۱ مربع سنتی میٹر، ۲۲۶ مکعب سنتی میٹر

(۲) ۲۰۴ مربع سنتی میتر، ۴۵۸ مکعب سنتی میتر

۲ - ۵۲۸ مربع سنتی میتر

۳ - ۱۲۲ مکعب سنتی میتر

۴ - ۱۲۳ مربع سنتی میتر ۵ - ۵۲۸ مربع سنتی میتر

۶ - ۱۰۶۲۰ میتر ۷ - ۵۰۰۶ انچ

۸ - ۵۰۰۰ مکعب سنتی میتر، ۱۵۶۹ سنتی میتر

۹ - ۷ مکعب فٹ ۱۰ - ۸۸۶۱ کلوگرام

۱۱ - ۱۸۶۸۵ میتر، ۵۲۵۶۹ گرام

مشقیں صفحہ (۱۱۹)

۲ - (۱) ۱۸۸ مربع سنتی میتر، ۳۰۲ مکعب سنتی میتر

(۲) ۱۴ مربع سنتی میتر، ۵ مکعب سنتی میتر

۳ - ۱۴۱۲ مربع سنتی میتر ۴ - ۲۷ مکعب سنتی میتر

مشقیں صفحہ (۱۲۵)

۱ - ۸۱۶ مربع سنتی میتر ۲ - ۱۱۰ مربع سنتی میتر

۳ - ۱۴۸ مکعب سنتی میتر ۴ - ۷۹ مربع سنتی میتر، ۸۸ مکعب سنتی میتر

۵ - ۱۲۶۲ مربع سنتی میتر ۶ - ۱۴۰ مکعب سنتی میتر

۹ - $\frac{۳(۱-۳)}{۳}$ ۱۰ - ۱۰ سنتی میتر، ۵ سنتی میتر

مشقیں صفحہ (۱۲۷)

۱ - ۲۰ مکعب سنتی میتر ۲ - ۲۶۸ گز ۱ فٹ

۳ - ۵۶۲ میتر ۴ - ۱۰۱۷ مربع سنتی میتر

- ۵- ۵۱ سنٹ ۱۲ سکینڈ ۶- ۲:۱
 ۷- ۱۸ مربع سنتی میٹر ۸- ۳۷۶۵۹۹ مربع سنتی میٹر
 ۹- ۳۹:۲۳ ۱۰- ۳۹۰ مربع سنتی میٹر

مشقیں صفحہ (۱۳۵)

- ۱- (۱) ۷۲ مربع سنتی میٹر، ۵۸ مکعب سنتی میٹر
 (۲) ۱۳۸۵ مربع سنتی میٹر، ۱۸۴۹ مکعب سنتی میٹر
 ۲- ۱۶ پونڈ ۱۹ شلنگ ۴ پنس ۳- ۰.۵۷ سنتی میٹر
 ۴- ۱۵ ۵- ۳۸۱ مکعب سنتی میٹر
 ۶- ۲۸۶ مکعب سنتی میٹر ۷- ۱ سنتی میٹر
 ۸- ۴۱۸ مربع سنتی میٹر، ۱۵۶۹۴ کلوگرام
 ۹- ۶۶۷ مکعب سنتی میٹر ۱۰- ۴۵۲ سنتی میٹر
 ۱۱- ۱ انچ ۱۲- ۱ سنتی میٹر
 ۱۳- ۱۷:۸ ۱۴- ۱۵۲ کلوگرام
 ۱۵- ۵۷۵۴ کلوگرام ۱۶- ۲۳۳۰۰ میٹر، ۱۰.۵۸ فیصد
 ۱۷- ۱۹۲۲۵۶۶ مربع سنتی میٹر، ۷۱۲۵۵۱۵ مکعب سنتی میٹر
 ۱۸- ۴۳۹۵۸۲ مربع سنتی میٹر، ۳۱۸۵۳۵ مکعب سنتی میٹر
 ۱۹- ۵۷۱۵۷۷ مربع سنتی میٹر
 ۲۰- ۶۱۱۵۳ مربع فٹ ۲۱- ۴۲ فٹ

مشقیں صفحہ (۱۵۱)

- ۲- (۱) ۲۴۸۸۰ میل (۲) ۱۷۱۵۲ میل
 (۳) ۱۴۲۷۰ میل (۴) ۶۴۵ میل

۵۔ ۱۹۷۱..... مربع میل (۲) ۸۱۷۲۰۰۰ مربع میل

(۳) ۷۸۵۹۰۰۰۰ مربع میل

مشقیں صفحہ (۱۷۰)

۱۔ ۵۰ : ۳۱ ۲۔ ۲۳ سنتی میٹر

۳۔ ۲۰۴ مربع سنتی میٹر، مکعب سنتی میٹر ۳۳۲

۴۔ ۱۳۶ مکعب فٹ ۵۔ ۶۶۶ سنتی میٹر

۶۔ ۲۸۰۳ مربع سنتی میٹر، مکعب سنتی میٹر ۱۵۶۸۰

۷۔ ۳۹۳۷ مکعب فٹ ۸۔ ۸۶۳ سنتی میٹر

۹۔ ۲۹۸ مربع سنتی میٹر، مکعب سنتی میٹر ۳۱۸

۱۰۔ ۲۰ فٹ ۱۳۔ ۳۱۵ مربع سنتی میٹر

۱۳۔ ۷۶۳۴۰۰۰ ۱۵۔ ۴۳۷۷۵ کلو گرام

۱۶۔ ۳۷۰ فیصد تقریباً ۱۷۔ ۵۳۱۵۰۰ میٹر

۱۸۔ ۱۰۰۰۰۰ ۱۹۔ ۲۳۲ مکعب انچ

۲۰۔ ۱۸۳۳ مربع فٹ

۲۱۔ ۱۸۸۹ مکعب انچ، ۱۹۲۰ مکعب انچ

عطیات سے صرف ۴ ملحوظ ہندسوں تک درست جواب حاصل ہو سکتا ہے

۲۲۔ ۴۵۶۱۶ سنتی میٹر ۲۳۔ ۷۷۷ سنتی میٹر ۲۴۔ ۱ : ۷ : ۱۹

۲۵۔ ۹۹۲۶ میل، ۳۹۷۶۰۰۰ مربع میل

۲۶۔ ۱۰۲۵۰ مکعب انچ ۲۷۔ ۱۴۳۷۰۰ اونس ۲۸۔ ۲۰۶۰۰ سنتی میٹر

۲۹۔ (۱) $\frac{3}{4}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $\frac{3}{4}$

۳۰۔ ۴۲۳۷۱۶ مکعب انچ

فہرست اصطلاحات



1. Axioms

علوم متعارفہ

2. Concurrent

مترکز

3. Concurrency

ترکز

4. Collinear points

مسامت نقطے

5. Corollary

نتیجہ صریح - فرع

6. Correspondence

تناظر

7. Corresponding

متناظر

8. Co-planer

ہم سطح

9. Dihedral angle

دو سطحی زاویہ

10. Edge

کنارہ

11. Face

رخ

12. Frustrum (of a cone)

مخروط ناقص

13. Generation

تکوین

14. Great circle
15. Hypothetical construction
16. Icosa hedron
17. Latitude
18. Longitude
19. Lune
20. Octahedron
21. Parallels
22. Parallelopiped
23. Plane
24. Polyhedron
25. Pyramid (right; Oblique)
26. Prism
27. Prismoid
28. Side-face
29. Skew
30. Sense
31. Solid
32. Solids of Revolution
33. Solid angle
34. Solid geometry

- کبیر دائرہ
عمل مفروضہ
ہست سطحی (میں سطحی)
عرض بلد
طول بلد
ہلالی سطح - پھانک کی منحنی سطح
ہست سطحی
متوازیات
متوازی السطوح
سطح مستوی (مستوی)
کثیر السطوح
مخروط مضلع (قائم مائل)
منشور
منشور نما
طرفی رخ یا پہلو
معوج یا کانا
رُخ
مجسمہ
گردشی مجہبات
مجسمہ زاویہ
ہندسہ مجہبات

35. Spherical triangle

کروی مثلث

36. Superposition

انطباق

37. Trihedral angle

سطحی زاویہ

38. Tetrahedron

ذو الاربعۃ السطوح (چار سطحی)

39. Volume

حجم

40. Wedge

فانہ

41. Zone

منطقہ



۳۶۶۔ باب: گرہ کا قطر ۶۲ دھ ۲ پانچ ہے چار ہندسوں والی جدولوں میں اس طرح سے
بڑے کے بعد کا حجم یہاں تک ممکن ہو صحیح صحیح حساب کرو جو اس
میں سے ۱۰ ہندسے تک ہے۔

۳۶۷۔ باب: کعبہ حوض جس کا ہر کنارہ اندر کی طرف سے ۶ فٹ
ہے پانی سے بھرا ہوا ہے اس پانی کے حجم کا ۰.۴ حصہ ہر روز
تجیر سے صلیغ ہو جاتا ہے۔ اگر یہ تسلیم کر لیا جائے کہ پانی کی کمی صرف تجیر
کی وجہ سے ہوئی ہے تو بتاؤ کہ ۱۰ دن کے بعد کنٹے اونس پانی حوض میں
رہ جائے گا۔

۳۶۸۔ سیب کے ایک منظم دو اربعہ اسطوح کا وزن ۱۰ کدو ۱۰
کلو گرام ہے اور سیبے کی کثافت اضافی ۳۵ و ۱۱ ہے، چار ہندسوں
والی جدولوں سے اس کے کنارہ کا طول جہاں تک ممکن ہو سکے
صحیح معلوم کرو۔

۳۶۹۔ ذیل کے گردشیں جسموں کو اسطوانوں، مخروطوں یا
ناقص مخروطوں کا مجموعہ یا مرکب سمجھو۔ ان میں سے ہر ایک کا حجم دریافت کرو۔
وہ جسم جس کی تکوین (۱) ایک متساوی الاضلاع مثلث (ضلع = ۱)
کو اس کے ایک ضلع کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے۔

(۲) ایک متساوی الاضلاع مثلث (ضلع = ۱) کو ایک ایسے
خط کے گرد گھمانے سے ہوتی ہے جو اس کے رأس میں سے قاعدہ
کے متوازی کھینچا جائے۔

(۳) ایک مربع (ضلع = ۱) کو ایک ایسے خط کے گرد گھمانے
سے ہوتی ہے جو مربع کے ایک کونہ میں سے گزرے اور اس کے ایک قطر

۲۱۔ ایک قائم مستدیر مخروط کی پیمائش کرنے سے معلوم ہوا کہ اس کے قاعدہ کا قطر ۲۶۵ اور ۳۶۵ کے درمیان ہے اور اس کی بلندی ۵۶۵ اور ۶۷۵ کے درمیان ہے، اگر ۱۱ کی نسبت ۱۶۱۶ اور ۳۵ لی جائے تو (۱) بڑے ابعاد کی بنا پر اور (۲) چھوٹے ابعاد کی بنا پر مخروط کا حجم محسوب کرو، اگر جواب اعزازیہ کے ساتھ محفوظ ہندسوں تک نکالا جائے تو بتاؤ کہ ان میں سے کتنے عدد بیکار ہیں۔

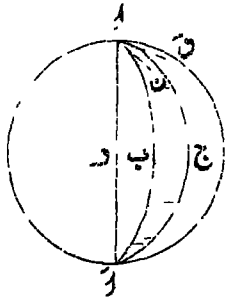
۲۲۔ دھات کے ایک کعب کو جس کا ہر کنارہ ۴۶۵ سنتی میٹر ہے پگلا کر ایک کرہ تیار کیا گیا ہے، چار ہندسوں والی جدولوں سے جہاں تک ممکن ہو سکے کرہ کا قطر صحیح صحیح محسوب کرو۔

۲۳۔ دو کروں کے وزن ۸ : ۱۱ کی نسبت میں ہیں اور ان کی اضافی کثافتیں بالترتیب ۱۵۲۱ اور ۵۶۴ ہیں، اگر پہلے کرہ کا قطر ۵۶۴ سنتی میٹر ہو تو دوسرے کرہ کا قطر دریافت کرو۔

۲۴۔ ایک قائم مستدیر مخروط کو قاعدہ کے متوازی دو مستوی سطحیں کاٹتی ہیں اور اس کے ارتفاع کو تین مساوی حصوں میں تقسیم کرتی ہیں، ان ٹکڑوں کے حجموں کا مقابلہ کرو۔

۲۵۔ اگر زمین کو ۹۲۶ میل قطر کا ایک کرہ تسلیم کیا جائے تو چار ہندسوں والی جدولوں سے خط بارود شمالی (عرض بلد ۳۳°۴۶') کا طول جہاں تک ممکن ہو صحیح صحیح دریافت کرو۔

سینڈ آس نیٹطقہ کا رقبہ دریافت کرو جو عرض بلد ۶۰° اور عرض بلد ۶۵° کے درمیان واقع ہوتا ہے۔



کرتے ہیں اس کو گردمی زاویہ
کہتے ہیں۔ اور اس کا ناپ وہ
زاویہ ہے جو کسی ایک نقطہ
تقاطع پر دائروں کے مماسوں
کے درمیان بنتا ہے۔

پس بڑے دائروں 'ا ب د'، 'ج ا' کا درمیانی زاویہ
وہ ہے جو مماسات 'ا ن' اور 'ا ج' کے درمیان بنے یہ مماس
بالترتیب ان دائروں کی سطحوں میں واقع ہیں اور خط تراش
'ا د' پر عمود ہیں، اس لئے ان مماسوں کا درمیانی زاویہ، مذکورہ
مستوی سطحوں کے دو سطحی زاویہ کا ناپ ہے۔

اس لئے گردمی زاویہ کا ناپ وہ دو سطحی زاویہ ہے جو
مقاطع کبیر دائروں کی سطحوں کے درمیان بنے۔

۵۷۔ تعریف۔ اگر دو مستوی سطحیں ایک کرہ کے قطر پر ایک
دوسرے کو قطع کریں تو ان کے درمیان کرہ کا جو مجسم حصہ
منقطع ہوتا ہے اس کو کرہ کی پھانک کہتے ہیں۔ پھانک کی
منحنی سطح کو ہلالی سطح سے بھی موسوم کرتے ہیں اس سے
ظاہر ہے کہ ہلالی سطح کو احاطہ کرنے والے خط دو کبیر
نصف دائرے ہوتے ہیں اور ان سے درمیان جو گردمی
زاویہ بنتا ہے اسکو پھانک کی منحنی سطح کا زاویہ کہتے ہیں۔

۵۸۔ کرہ کی پھانک کی منحنی سطح کا رقبہ دریافت کرو۔
یہ آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے پھانکوں کی منحنی سطحوں کے

ایک کردی منطقہ کی سطح کا رقبہ جس کے مستوی سروں
درمہ میں ضابطہ ۲۲۲ (جب طہ - جب طہ) سے

۱۰ اوسط قطر کو ۹۲۲ میل مان کر چار ہندسوں والی
سے ذیل کی سطحوں کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو
ن کی کل سطح

نہ بارودہ کی سطح [دائرہ بارودہ کا عرض بلد = $\frac{1}{4} ۹۹$]
(۳) منطقہ حارہ کی سطح [منطقہ حارہ کے سروں کے عرض بلد = $\frac{1}{4} ۲۳$ شمالاً اور جنوباً]
۴۔ ایک کرہ کا نصف قطر ہے، اسکی سطح پر کے کسی نقطہ (لا، ما، ی) کے
عرض اور طول بلدہ اور فہ ہیں، ثابت کرو کہ

لا = رجم طہ حجم فہ

ما = رجم طہ جب فہ

ی = رجم طہ

پچھانکوں کی منحنی سطحیں

۵۶۔ اگر دو مستوی سطحیں ایک کرہ کے مرکز میں سے
گزریں تو لازماً وہ ایک دوسرے کو کرہ کے ایک قطر پر
قطع کریں گی۔

اس لئے کوئی دو کبیر دائرے لازماً ایک دوسرے
کو ایک قطر کے سروں پر قطع کریں گے۔

جس زاویہ پر دو کبیر دائرے ایک دوسرے کو قطع